Corrigé type " Série n° 04 " Algèbre I

EX01

① • $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $b*a = \ln(e^b + e^a) = \ln(e^a + e^b) = a*b$

Donc, $*$ est commutative.

• $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $(a*b)*c = \ln(e^{a*b} + e^c) = \ln(e^a + e^b + e^c)$

$= a*(b*c)$.

Donc, $*$ est associative.

• $a*e = a \iff \ln(e^a + e^e) = a \iff e^e = 0$.

Il n'y a donc pas de neutre.

② • $\perp$ associative $\iff \forall x,y,z \in \mathbb{R} : (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$.

$\iff \forall x,y,z \in \mathbb{R} : a^2x + aby + bz = ax + aby + b^2z$.

Donc, $a^2 = a$ et $ab = ba$ et $b = b^2$

D'où, $(a=0$ ou $a=1)$ et $(b=0$ ou $b=1)$.

• $\perp$ possède un élément neutre $e \in \mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{R} : x \perp e = e \perp x = x$

$\iff \forall x \in \mathbb{R} : ax + be = ae + bx = x$.

$\iff a = 1$ et $e = 0$ et $b = 1$.

EX02

① • $((x,y)*(x',y'))*(x'',y'') = (xx', xy'+y)*(x'',y'') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$ et

$(x,y)*((x',y')*(x'',y'')) = (x,y)*(x'x'', x'y''+y') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$.

Donc, $*$ est associative.

• $(x,y)*(1,0) = (x,y)$ et $(1,0)*(x,y) = (x,y)$.

Donc, $(1,0)$ est élément neutre.

- $(x,y) * (\frac{1}{x}, \frac{-y}{x}) = (1,0)$ et $(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}) * (x,y) = (1,0)$.

Donc, tout élément est symétrisable. D'où, $(G,*)$ est un groupe.

- $(1,2) * (3,4) = (3,6)$ et $(3,4) * (1,2) = (3,10)$.

Alors, le groupe n'est pas commutatif.

② $H = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est inclus dans G.

1/ $(1,0) \in H$,

2/ $\forall (x,y), (x',y') \in H$, $(x,y) * (x',y') \in H$ car $xx' > 0$,

3/ $\forall (x,y) \in H$, $(x,y)^{-1} = (\frac{1}{x}, \frac{-y}{x}) \in H$ car $\frac{1}{x} > 0$.

Donc H est un sous-groupe de G.

EXO 3

① f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x_1 \times x_2) = \ln(x_1 \times x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$
$= f(x_1) + f(x_2)$.

②
$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{x \in \mathbb{R}_+^* : f(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+^* : \ln x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+^* : e^{\ln(x)} = e^0 = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+^* : x = 1\} \\ &= \{1\} \end{aligned}$$

Alors, f est injective.

③ f est surjective car :
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = e^y \in \mathbb{R}_+^* \mid f(x) = f(e^y) = \ln(e^y) = y$.

Pos

Exo3

① $(*)$

② $(x,y)*(x',y') = (xx', xy'+x'y) = (x'x, x'y+xy') = (x',y')*(x,y)$.

Donc, $*$ est commutative.

$$[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') = (xx', xy'+x'y)*(x'',y'') = (xx'x'', xx'y''+x''(xy'+x'y))$$
$$= (xx'x'', xx'y''+x''xy'+x''x'y).$$

$$(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')] = (x,y)*(x'x'', x'y''+x''y') = (xx'x'', x(x'y''+x''y')+x'x''y)$$
$$= (xx'x'', xx'y''+xx''y'+x'x''y).$$

La loi $*$ est associative

③ Soit (e,e') tel que pour tout $(x,y)\in A$: $(x,y)*(e,e') = (x,y)$.

Alors, $\begin{cases} x.e = x \\ xe'+ye = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = x \\ xe'+y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 1 \\ e' = 0 \end{cases}$

$(1,0)$ est l'élément neutre de A pour la loi $*$.

④ Toutes les propriétés d'un anneau sont dans les questions précédentes sauf la distributivité de $*$ par rapport à l'addition

$$(x,y)*[(x',y')+(x'',y'')] = (x,y)*(x'+x'', y'+y'')$$
$$= (x(x'+x''), x(y'+y'')+(x'+x'')y)$$
$$= (xx'+xx'', xy'+x'y+xy''+x''y)$$
$$= (xx', xy'+x'y)+(xx'', xy''+x''y)$$
$$= [(x,y)*(x',y')]+[(x,y)*(x'',y'')].$$

$(A,+,*)$ est un anneau commutatif.

⑤ $B = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

① $B \subset \mathbb{Z}^2$ et $(1,0) \in A$.

② $\forall (a,0), (b,0) \in B$, on a $(a,0)-(b,0) = (a-b,0) \in B$.

③ $\forall (a,0), (b,0) \in B$, on a $(a,0)*(b,0) = (ab,0) \in B$.

B est donc un sous-anneau de $(\mathbb{Z}^2, +, *)$.

⑥ (a) $(K,+,\cdot)$ est un corps car

$\begin{cases} \text{(i) } (K,+,\cdot) \text{ est un anneau commutatif} & (*) \\ \text{(ii) tout élément non nul est inversible pour la multiplication.} \end{cases}$

(b) $(L,+,\cdot)$ est un sous-corps de $(K,+,\cdot)$ si et seulement si :

(i) $\forall x,y \in L : x-y \in L$ (ii) $\forall x,y \in L : xy \in L$ (iii) $\forall x \in L^* : x^{-1} \in L$.

Posons que : $x = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{3}$, $y = \alpha_2 + \beta_2\sqrt{3} \in L$

(i) On a : $x-y = (\alpha_1-\alpha_2) + (\beta_1-\beta_2)\sqrt{3} = \alpha_3 + \beta_3\sqrt{3} \in L$.

car : $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_3 = \beta_1 - \beta_2 \in \mathbb{Q}$.

(ii) on a aussi : $xy = (\alpha_1+\beta_1\sqrt{3})(\alpha_2+\beta_2\sqrt{3}) = (\alpha_1\alpha_2 + 3\beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\sqrt{3}$
$= \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\sqrt{3} \in L$.

car : $\tilde{\alpha} = \alpha_1\alpha_2 + 3\beta_1\beta_2$, $\tilde{\beta} = \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \in \mathbb{Q}$.

(iii) Soit $x = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{3} \in L^*$, c'est-à-dire $\alpha_1 \neq 0$ ou $\beta_1 \neq 0$. Alors,

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha_1+\beta_1\sqrt{3}} = \frac{\alpha_1 - \beta_1\sqrt{3}}{\alpha_1^2 - 3\beta_1^2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 - 3\beta_1^2} + \frac{-\beta_1}{\alpha_1^2 - 3\beta_1^2}\sqrt{3} = a + b\sqrt{3} \in L.$$

car : $a = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1^2 - 3\beta_1^2}$, $b = \dfrac{-\beta_1}{\alpha_1^2 - 3\beta_1^2} \in \mathbb{Q}$.

Donc, $(L,+,\cdot)$ est un sous-corps de $(K,+,\cdot)$.