Université de M'sila
Faculté de Mathématiques et de L'informatique
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022-2023

1ère Année Math et MI

Durée : 01H30.

Epreuve finale : Algèbre 1

Exercice 01:(04pts)

1) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$. Montrer par contraposée que $x \neq y \Longrightarrow \frac{x}{1+y} \neq \frac{y}{1+x}$. 2pts

2) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par l'absurde que $x.y \leq \frac{x^2+y^2}{2}$. 2pts

Exercice 02: (04 points)

Soit E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

1. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.
2. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$. 2pts+2pts

Exercice 03:(06pts)

Soit $\mathcal{S}$ la relation définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : \; x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow \frac{x^2}{x^2+1} \leq \frac{y^2}{y^2+1}$

1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. 3pts
2) L'ordre est-il total ? (justifier). 3pts

Exercice 04: (06 pts)

Soit $G = \mathbb{R}$. On définit sur G la loi de composition interne notée $*$ par

$$\forall\, a,\; b \in G,\; a * b = a + b + \frac{1}{6}$$

1. Montrer que $*$ est une loi commutative 0.5
2. Montrer que $(G,\; *)$ est un groupe. 2.5
3. Soit

$$\begin{aligned} f \;&:\; (G,\; *) \longrightarrow (\mathbb{R},\; +) \\ x \;&\longrightarrow\; 3x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Montrer que f est un isomorphisme de groupe.. 3pts

Bon courage

Université de M'sila.
Département de Mathématiques .
Module:Algèbre 1 (S_1−1ère Année LMD, MI) **Durée: 01^h:30^m**

Corrigé de l'examen Final (**2022−2023**)

Exercice 01:(04pts)

1) Pour montrer par contraposée que $x \neq y \Longrightarrow \frac{x}{1+y} \neq \frac{y}{1+x}$, il faut montrer que $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \Longrightarrow x = y$. En effet:

On a $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$
$$\begin{aligned} &\Longrightarrow x + x^2 = y + y^2 \\ &\Longrightarrow (x-y)(x+y+1) = 0 \\ &\Longrightarrow (x-y) = 0, \text{ car } x+y \geq 0 \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

2) Supposons que $x.y > \frac{x^2+y^2}{2}$, donc $0 > x^2+y^2-2x.y$, c'est à dire $0 > (x-y)^2$, ce qui est absurde car $(x-y)^2$ est positif.

$$\begin{aligned} (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{(B \cap \overline{C})} \\ &= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) \\ &= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) \\ &= A \cap \overline{C} \cap \overline{B} \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= A \cap \overline{(B \cup C)} \\ &= A \setminus (B \cup C). \boxed{2pt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= A \cap \overline{(B \cap C)} \\ &= A \setminus (B \cap C). \boxed{2pt} \end{aligned}$$

1.1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a:
$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$, c-à-d $x\mathcal{S}x$.
Alors $\mathcal{S}$ est reflexive..................(01pt)
1.2) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a:

$$\begin{aligned}(x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x\ ) &\Longrightarrow (\tfrac{x^2}{x^2+1} \leq \tfrac{y^2}{y^2+1} \text{ et } \tfrac{y^2}{y^2+1} \leq \tfrac{x^2}{x^2+1}) \\ &\Longrightarrow \tfrac{x^2}{x^2+1} = \tfrac{y^2}{y^2+1} \\ &\Longrightarrow x^2y^2 + x^2 = y^2x^2 + y^2 \\ &\Longrightarrow x^2 = y^2 \\ &\Longrightarrow x = y, \text{ car } x, y \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{S}$ est antisymétrique..................(2pts)
1.3) Soit $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, on a:

$$\begin{aligned}(x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}z\ ) &\Longrightarrow (\tfrac{x^2}{x^2+1} \leq \tfrac{y^2}{y^2+1} \text{ et } \tfrac{y^2}{y^2+1} \leq \tfrac{z^2}{z^2+1}) \\ &\Longrightarrow (\tfrac{x^2}{x^2+1} \leq \tfrac{z^2}{z^2+1}) \\ &\Longrightarrow x\mathcal{S}z\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{S}$ est transitive..................(01pt)
Par suite $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre..................(01pt)
2) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a: $\frac{x^2}{x^2+1}, \frac{y^2}{y^2+1} \in \mathbb{R}_+$, donc $(\frac{x^2}{x^2+1} \leq \frac{y^2}{y^2+1}$ ou $\frac{y^2}{y^2+1} \leq \frac{x^2}{x^2+1})$,
c-à-d: ($x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$).
Par suite $\mathcal{S}$ est un ordre total..................(01pt)

1. La commutativité: Soit $a,\ b \in G$, alors,

$$a * b = a + b + \frac{1}{6} = b + a + \frac{1}{6} = b * a. \longrightarrow 1pt$$

Doù la commutativité.

2. Montrons que $(G,\ *)$ est un groupe.

a. L'associativité:

Soit $a,\ b,\ c \in G$, alors, d'une part

$$a * (b * c) = a * \left(b + c + \frac{1}{6}\right) = a + b + c + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}. \rightarrow 0{,}75 pts$$

D'autre part

$$(a * b) * c = \left(a + b + \frac{1}{6}\right) * c = a + b + c + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}. \rightarrow 0{,}75 pt$$

D'où l'associativité.

b. L'élément neutre. Comme la loi est commutative il suffit de démontrer l'existence de l'élément neutre uniquement à gauche ou à droite.

$$a * e = a \Leftrightarrow a + e + \frac{1}{6} = a \Rightarrow e = -\frac{1}{6} \in G. \longrightarrow 1{,}5 pts$$

c. L'élément symétrique: Soit $a \in G$, alors il existe un $a' \in G$ tel que $a * a' = e = -\frac{1}{6}$. Alors

$$\begin{aligned} a * a' &= a + a' + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \\ &\Rightarrow a' = -a - \frac{1}{3} \in G. \longrightarrow 1pt \end{aligned}$$

2. Soit

$$\begin{aligned} f &: (G,\ *) \rightarrow (\mathbb{R},\ +) \\ x &\rightarrow 3x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Montrons que f est un isomorphisme de groupe.

a. f est un homomorphisme

Soit $x,\ y \in G$, alors,

$$\begin{aligned} f(x * y) &= 3(x * y) + \frac{1}{2} \\ &= 3\left(x + y + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} = \left(3x + \frac{1}{2}\right) + \left(3y + \frac{1}{2}\right) \\ &= f(x) + f(y). \longrightarrow 1pt \end{aligned}$$

b. f est bijective

1. L'injection. Soit $x,\ y \in G$, alors

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{2} = 3y + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y. \text{ d'où l'injection}$$ → 1pt

2. La surjection: Soit $y \in \mathbb{R}$, alors, on démontre qu'il existe un $x \in G$ tel que $f(x) = y$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= y \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{2} = y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{3} - \frac{1}{6} \in G. \end{aligned}$$

D'où la surjection. De 1 et 2 on déduit que f est une bijection. → 1pt