Chapitre 1

Notion de base

1.1 Couple de variables aléatoires

1.1.1 Couple de variables aléatoires réelles discrètes

Soient X et Y deux variables aléatoires, réelles et discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ telles que :

$$X(\Omega) = \{x_i/i \in I\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_j/j \in J\}$$

Lois associées à un couple (X, Y)

Loi conjointe La loi de probabilité conjointe du couple (X, Y) , est donnée par la probabilité

$$p_{ij} = P(X = x_i \text{et} Y = y_j)$$

Lois marginales Les lois de probabilités marginales sont données par

$$P_{marg}(X = x_i) = \sum_{j \in J} p_{ij} \tag{1.1}$$

et

$$P_{marg}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij} \tag{1.2}$$

Lois conditionnelles

Lois conditionnelles de X si $Y = y_j$ et $P(Y = y_j) > 0$

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i \text{et} Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{P_{marg}(Y = y_j)} \tag{1.3}$$

Lois conditionnelles de Y si $X = x_i$ et $P(X = x_i) > 0$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i \text{et} Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{P_{marg}(X = x_i)} \tag{1.4}$$

Remarque 1 $\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} = 1$

Moments conditionnels

Espérance mathématique conditionnelle

L'espérance mathématique conditionnelle de la variable aléatoire X sachant que $Y = y_j$ est défini par :

$$E[X|Y=y_j] = \sum_{i\in I} x_i P(X=x_i|Y=y_j) = \frac{\sum\limits_{i\in I} x_i P_{ij}}{\sum\limits_{k} P_{kj}} \tag{1.5}$$

Variance conditionnelle
La variance conditionnelle de la variable aléatoire X sachant que $Y = y_j$ est défini par :

$$Var[X|Y=y_j] = E[(X - E(X|Y=y_j)^2|Y=y_j] \tag{1.6}$$

Fonctions de répartition

Fonction de répartition conjointe du couple
Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles discrètes. On appelle fonction de répartition conjointe du couple la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \text{et} Y \leq y) \tag{1.7}$$

Fonctions de répartition marginales
On appelle fonction de répartition marginale de X, la fonction dé finie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) \tag{1.8}$$

De même, pour Y :

$$\forall y \in \mathbf{R}, F_Y(y) = \sum_{y_j \leq y} P(Y = y_j) \tag{1.9}$$

1.1.2 Covariance et coefficient de corrélation linéaire

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ et admettant chacune une espérance mathématique. On appelle covariance de X et de Y le nombre :

$$cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \tag{1.10}$$

Définition 1 *On dit que les variables aléatoires X et Y ne sont pas corrélées si $cov(X, Y) = 0$.*

Définition 2 *Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une covariance, et des variances non nulles. Leur coefficient de corrélation linéaire est alors défini par :*

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{1.11}$$

Définition 3 *(Indépendance) On dit que les deux variables aléatoires discrètes X et Y definies sur sur le même espace probabilisé, sont indépendantes si :*

$$\forall x_i \in X(\Omega) \text{et} \forall y_j \in Y(\Omega), P(X = x_i etY = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \tag{1.12}$$

Remarque 2 *Si les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes on a alors :*

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Propriétés 1 *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes à valeurs dans $\mathbf{N}$ ($X(\Omega) \in \mathbf{N}$ et $Y(\Omega) \in \mathbf{N}$), alors la somme $X + Y$ est une variable à valeurs dans $\mathbf{N}$ dont la loi est donnée par :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, P(X+Y=n) = \sum_{i+j=n} P(X = ietY = j) \tag{1.13}$$

Si de plus, les variables X et Y sont indépendantes, on obtient la loi de $X+Y$ à partir des lois marginales de X et de Y :

$$\forall n \in \mathbf{N}, P(X+Y=n) = \sum_{i+j=n} P(X=i) \cdot P(Y=j) \tag{1.14}$$

Remarque 3 *Si les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors, elles ne sont pas corrélées (la réciproque est en général fausse).*

1.1.3 Couple de variables aléatoires continues

Soient X et Y deux variables aléatoires continues, et soit F_{XY} la fonction de répartition conjointe du couple (X, Y) définie par :

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Lois associées à un couple (X, Y)

Loi conjointe Si la fonction de répartition conjointe F_{XY} d'un couple de variables aléatoires continues (X, Y) est dérivable par rapport à x et y, la loi du couple (X, Y) est définie par la densité :

$$f(x, y) = \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Lois marginales

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles absolument continu, de densité f Alors Les densitées marginales de probabilités sont données par :

$$f_{margX}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy \tag{1.15}$$

et

$$f_{margY}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx \tag{1.16}$$

Lois conditionnelles Lois conditionnelles de X si $Y = y$ est donnée par la fonction densité suivante :

$$f_{margX}(x|Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_X(y)} \tag{1.17}$$

Lois conditionnelles de Y si $X = x$ est donnée par la fonction densité suivante :

$$f_{margX}(x|Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_X(y)} \tag{1.18}$$

Espérance mathématique conditionnelle

L'espérance mathématique conditionnelle de la variable aléatoire X sachant que $Y = y$ est défini par :

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{margX}(x|Y = y) dx \tag{1.19}$$

L'espérance mathématique conditionnelle de la variable aléatoire Y sachant que $X = x$ est défini par :

$$E[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{margY}(y|X = x) dy \tag{1.20}$$

L'ésperance conditionnelle de X sachant Y est la variable aléatoire réelle :

$$E[X|Y] = \varphi(Y), \tag{1.21}$$

avec $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction definie par $\varphi(y) = E[X|Y = y]$

Fonctions de répartition

Fonction de répartition conjointe du couple
Soit un couple (X,Y) de variables aléatoires réelles discrètes. On appelle fonction de répartition conjointe du couple la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x\text{et}Y \leq y) \tag{1.22}$$

Fonctions de répartition marginales
On appelle fonction de répartition marginale de X, la fonction dé finie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_X(x) = P(X \leq x) \tag{1.23}$$

De même, pour Y :

$$\forall y \in \mathbf{R}, F_Y(y) = P(Y =\leq y) \tag{1.24}$$

Définition 4 *(Indépendance) Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles absolument continue de densité f_{XY},on dit que les deux variables X et Y sont indépendantes si :*

$$f_{XY}(x,y) = f_{margX}(x) \cdot f_{margY}(y)$$

$$\forall x_i \in X(\Omega)\text{et}\forall y_j \in Y(\Omega), P(X = x_i etY = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \tag{1.25}$$

Remarque 4 *Si les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes on a alors :*

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Propriétés 2 *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles absolument continue de densité f_{XY} , alors la somme $X+Y$ est une variable à valeurs dans $\mathbf{N}$ dont la fonction densité sst donnée par :*

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(s-t,t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(t,s-t)dt \tag{1.26}$$

Si de plus, les variables X et Y sont indépendantes, on obtient la loi de $X+Y$ à partir des densités marginales de X et de Y :

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{margX}(s-t) f_{margY}(t)dt \tag{1.27}$$