Université de M.Boudiaf M'sila
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

2022/2023

$1^{éme}$ AMD

Corrigé type d'examen de Module Semigroupes et Automates Finis

Exercice 1 (6 pts):

Soient A un alphabet et $(M, \cdot, 1_M)$ un monoïde commutatif. Considérons le morphisme de monoïdes $h : A^* \to M$.

1. Montrons que $\forall u \in A^*, h(u) = \prod_{a \in A} (h(a))^{|u|_a}$:

Soit $u \in A^*$, on distingue deux cas:
- Si $u = \epsilon$, on a $h(\epsilon) = 1_M = \prod_{a \in A} (h(a))^{|\epsilon|_a} = \prod_{a \in A} (h(a))^0$.
- Si $u = a_1...a_k$ où $k \in \mathbb{N}^*, \forall 1 \leq i \leq k, a_i \in A$, alors $h(u) = h(a_1)...h(a_k)$, comme $(M, \cdot, 1_M)$ est commutatif alors $h(u) = \prod_{a \in A} (h(a))^{|u|_a}$.

Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ et A un alphabet. On considère l'application $\varphi : A^* \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, u \longmapsto |u| \pmod{n}$

1. Montrons que φ est un morphisme de monoïdes:

On a $\forall u, v \in A^*, \varphi(uv) = |uv| \pmod{n} = |u| \pmod{n} + |v| \pmod{n} = \varphi(u) + \varphi(v)$.

De plus $\varphi(\epsilon) = \overline{0}$.

Soit $\psi : \{\alpha, \beta\}^* \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ définie par $\psi(\alpha) = 2; \psi(\beta) = 3$

3. $\psi(u) = 2|u|_\alpha + 3|u|_\beta$.

Exercice 2 (8 pts):

Soient $(M, \cdot, 1_M)$ un monoïde et $A \subseteq M$. On définit sur M la relation R_A comme suit:
$(aR_Ab) \Leftrightarrow (\forall x, y \in M, xay \in A \Leftrightarrow xby \in A)$.
1. Montrons que $\forall a, a', b, b' \in M, (aR_Ab \text{ et } a'R_Ab') \Rightarrow aa'R_Abb'$:
Soient $x, y \in M$, on a $x\,(aa')\,y \in A \Leftrightarrow x\,(a)\,a'y \in A$
$\Leftrightarrow x\,(b)\,a'y \in A \Leftrightarrow xb\,(a')\,y \in A \Leftrightarrow xb\,(b')\,y \Leftrightarrow x\,(bb')\,y \in A$.
On définit sur $M \times M$ la loi " $*$ " comme suit:
$(a, b) * (a', b') = (aa', bb')$.
2. Montrons que $(M \times M, *)$ est un monoïde;
- la loi " $*$ " est interne.
- la loi " $*$ " est associative.
- l'élément $(1_M, 1_M)$ est l'élément neutre de $(M \times M, *)$.
On considère l'ensemble $E = \{(a, b) \in M \times M, aR_Ab\}$.
3. Montrons que $(E, *)$ est un sous monoïde de $(M \times M, *)$:
- On pour tous $x, y \in M, x1_My = xy \in M \Leftrightarrow x1_My = xy \in M$, par conséquent 1_MR1_M.
Donc $(1_M, 1_M) \in E$.
- Soient $(a, b), (a', b') \in E$, i.e aR_Ab et $a'R_Ab'$, qui implique $aa'R_Abb'$, par conséquent $(a, b) * (a', b') \in E$.
Soit $[1_M] = \{u \in M, (1_M, u) \in E\}$.
4. Montrons que $([1_M], \cdot)$ est un sous monoïde de $(M, \cdot, 1_M)$:
- on $(1_M, 1_M) \in E$ donc $1_M \in [1_M]$.
- soient $u, v \in [1_M]$, i.e 1_MR_Au et 1_MR_Av, donc 1_MR_Auv, par conséquent $uv \in [1_M]$.

Exercice 3 (6 pts):

Soient Σ un alphabet et $L \subseteq \Sigma^*$. Soient M un monoïde fini et $h : \Sigma^* \to M$ un morphisme de monoïdes tels que il existe $K \subseteq M$ avec $L = h^{-1}(K)$.
On considère l'automate $A = (Q, \Sigma, I, F, \delta)$ où $Q = M, I = \{1_M\}, F = K$, $\widetilde{\delta} : M \times \Sigma^* \to M$ définie par $\widetilde{\delta}(m, u) = mh(u), m \in M, u \in \Sigma^*$.
1. Montrons que $\mathrm{L}(A) = L$:
On $\mathrm{L}(A) = \left\{u \in \Sigma^*, \widetilde{\delta}(1_M, u) \in K\right\} = \{u \in \Sigma^*, h(u) \in K\} = L$.
Soit $A = (Q, \Sigma, I, F, \delta)$ un automate fini. Considérons l'application f :

$(\Sigma^*, \cdot) \longrightarrow (p(Q \times Q), \circ)$ définie par:
$f(w) = R_w$ où $R_w = \left\{(q, q') \in Q \times Q, \widetilde{\delta}(q, w) = q'\right\}$.
2. Montrons que f est un antimorphisme de monoïdes:
- on a $f(\epsilon) = R_\epsilon = \left\{(q, q') \in Q \times Q, \widetilde{\delta}(q, \epsilon) = q'\right\} = \{(q, q), q \in Q\} = \Delta_{Q \times Q}$.
- pour tous $w, w' \in \Sigma^*$, $f(ww') = R_{ww'} = \left\{(q, q') \in Q \times Q, \widetilde{\delta}(q, ww') = q'\right\}$
$= \left\{(q, q') \in Q \times Q, \widetilde{\delta}\left(\widetilde{\delta}(q, w), w'\right) = q'\right\} = R_{w'} \circ R_w$.