Chapitre03 calcul propositionnel

2^{eme} *année L.M.D Mathématiques*

Année 2020/2021

L'enseignant : Dr SAADAOUI Kheir

Réf : Logique mathématique cours et exercices Tome $1-2$ *René cori Daniel Lascar*

3.1 Définition d'une proposition

On rappelle qu'une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux. On dit alors que les deux valeurs de vérité d'une proposition sont « vrai » et « faux ». A partir d'une ou plusieurs propositions, on peut en construire d'autres. C'est l'objet des paragraphes suivants.

3.2 Équivalence logique

Définition 1. *Deux propositions équivalentes P et Q sont deux propositions simultanèment vraies et simultanément fausses.*

On dira par la suite que deux propositions équivalentes sont deux propositions ayant les mêmes valeurs de vérité. Cette phrase peut se visualiser dans un tableau appelé table de vérité dans lequel on fait apparaître les différentes valeurs de vérité possibles pour le couple (P, Q) (Vrai et Vrai, Vrai et Faux, ...) et, en correspondance, les valeurs de vérité de la proposition $P \Leftrightarrow Q$. Ainsi, la table de vérité de l'équivalence logique $P \Leftrightarrow Q$ est : Vous devez lire en première ligne de ce tableau que si les propositions P

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

et Q sont vraies, la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, et en deuxième ligne, que si P est vraie et Q est fausse, $P \Leftrightarrow Q$ est fausse.

L'équivalence logique joue pour les propositions, le rôle que joue l'égalité pour les nombres. Les expressions $3+2$ et 5 ne sont pas identiques et pourtant on écrit $3+2 = 5$. De même, les propositions $(x^2 = 1)$ et $(x = 1 \ ou \ x = -1)$ ne sont pas identiques et pourtant on écrit $(x^2 = 11) \Leftrightarrow (x = 1 \ ou \ x = -1)$.

3.3 Négation d'une proposition

Soit P une proposition. On définit sa négation, notée $\overline{P}$ (ou aussi non P ou $\rceil P$), à partir de sa table de véritè.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Cette simple table contient en germe un très grand nombre d'erreurs de raisonnement à venir et ceci dans à peu près tous les chapitres. On doit déjà avoir conscience que la négation de « ce chat est blanc » est, non pas « ce chat est noir », mais tout simplement « ce chat n'est pas blanc » ou que le contraire de la phrase « f est la fonction nulle » est, non pas « f ne s'annule pas », mais « f n'est pas la fonction nulle » ou encore « f ne s'annule pas en au moins un point ». Enfin, le contraire de la phrase « $x \geq 0$ » est « $x < 0$ », et non pas « $x \leq 0$ ».

Théorème 1. *Soit P une proposition.* $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$.

Démonstration . Il est clair que $\overline{\overline{P}}$ et P ont les mêmes valeurs de vérité.

3.4 Les connecteurs logiques « et » et « ou »

Soient P et Q deux propositions. On peut définir les propositions « P ou Q », notée $P \vee Q$, et ń P et Q ż, notée $P \wedge Q$ par les tables de vérité ci-dessous.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

⋄ On peut noter que $P \vee Q$ est fausse si et seulement si P et Q sont fausses alors que $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont vraies.

⋄ Il existe en français deux significations du mot « ou ». Il y a le « ou exclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux » et le « ou inclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, soit les deux ». V est le « ou inclusif ».

Théorème 2. Soit P une proposition. $P \wedge P \Leftrightarrow P$ et $P \vee P \Leftrightarrow P$.

Démonstration. $P \wedge P$ et $P \vee P$ sont vraies quand P est vraie et fausses sinon.

Théorème 3.(Lois de de Morgan) Soient P et Q deux propositions.

$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ *et* $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$. (Le contraire de « et » est « ou » et le contraire de « ou » est « et »).

Démonstration . On démontre ces équivalences à l'aide de tables de vérité.

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

,

Dans chaque table, on lit effectivement les mêmes valeurs de vérité dans les quatrième et septième colonnes.

■**Commentaire .** . A partir de ces résultats, on peut se convaincre que tout énoncé peut s'écrire en utilisant uniquement la conjonction $\bigwedge$ et la négation (par exemple, au paragraphe suivant, on verra que la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est la proposition $(\overline{(P \wedge \overline{Q})} \wedge \overline{(Q \wedge \overline{P})})$. Ce résultat a une importance en électronique et en informatique.

Théorème 4. Soient P, Q et R trois propositions.

1) $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P et P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$.

2) $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ *et* $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$. 3) $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow$

3.5 Implication logique

3.5.1 Définition de l'implication logique Si P et Q sont deux propositions, on définit l'implication logique : $P \Rightarrow Q$ par sa table de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Théorème 5. Soient P et Q deux propositions. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$.

Démonstration . $P \Rightarrow Q$ est fausse dans l'unique cas où P est vraie et Q est fausse ou encore quand $\overline{P}$ et Q sont toutes deux fausses. $P \Rightarrow Q$ a donc les mêmes valeurs de vérité que $\overline{P} \vee Q$.

Vient maintenant une règle essentielle pour mener des démonstrations

Théorème 6. (Transitivité de l'implication) Soient P, Q et R trois propositions.

$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

Démonstration . Vous démontrerez ce théorème à l'aide d'une table de vérité à 8 lignes.

On relie l'équivalence logique à l'implication logique par le théorème suivant :

Théorème 7. (Propositions équivalentes) Soient P et Q deux propositions. Alors, $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$.

Démonstration . Il s'agit de vérifier que les deux propositions

$P \Leftrightarrow Q$ *et* $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ ont les mêmes valeurs de vérité On lit bien les mêmes

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Définition : L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles est plus petit sous ensemble de A^* qui vérifies :

1- $P \subseteq \mathcal{F}$ (toute proposition élémentaire est une forme).

2- $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow \rceil F \in \mathcal{F}$

3- $F, G \in \mathcal{F} \Longrightarrow (F * G) \in \mathcal{F}$ avec $*, =, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$

Remarque :

1- Les formule sont des mots i.e des suit de symboles sans aucune signification l'attribution d'un sens i.e d'une valeur "vrais " ou "fausse" a une formule constitue le sémantique de formule .

2- Le terme " plus petit"est à prendre au sens de l'inclusion des ensembles de $\mathcal{F}$ est donc l'intersection de toutes les parties de A^* qui vèrifient les propriétès 1 , 2 est cette intersection est non vide puisque A^* lui mê me vérifie ces proprietés donc : $\mathcal{F} = \bigcap_{Y \subseteq A^*} Y$ et Y vérifie 1 , 2 *et* 3.

définition : La hauteur d'une formule $F \in \mathcal{F}$ est le plus petit des entiers n tels que : $F \in \mathcal{F}$. Elle noté $h[F]$

$$h(F) = min\{n/F \in \mathcal{F}_n\}$$

Exemple :

- $F = p, \quad h(F) = 0.$
- $F = (p \wedge q), \quad h(F) = 1.$
- $F = \rceil p, \quad h(F) = 1.$
- $F = (\rceil p \wedge q); \quad h(F) = 2.$

Exemples :

- $(\rceil p \longrightarrow q)$ est une formule .
- $(p \wedge q \wedge r)$ n'est pas une formule .
- $\rceil (p \longrightarrow q)$ est une formule .
- $p\, est\, une\, formule$
- $(p \longrightarrow q \vee r)$ n'est pas une formule.

Définition : La longueur d'une formule F est le nombre des lettres dans F

$l(F) = \sharp lettres\, dans\, F$ **Exemple :** $F = (p \wedge q) \qquad l(F) = 5 , F = p ; l(F) = 1$

Principe d'indiction sur l'ensemble des formules :

Supposons que nous voulions démontrer qu'une certaine proposition $Q(F)$ est vérifiée par toute $F \in \mathcal{F}$. Nous pouvons pour cela faire un raisonnement par récurrence (au sens usuel) sur la hauteur de F : nous serons alors amenés à montrer , d'abord que $Q(F)$ est vraie pour toute formule F appartenant a $\mathcal{F}_0$ puis que si $Q(F)$ est vraie pour toute $F \in \mathcal{F}_n$, alors $Q(F)$ est également vraie pour toute $F \in \mathcal{F}_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Principe : Si Q vérifie :

1) $Q(p)\, vraie \quad \forall\, p \in P\, i.e\, (Q(F)\, vrais\, par\, F \in \mathcal{F}_n)$.

2) $Q(F)\, vraie \Rightarrow Q(\urcorner F)\, vraie$.

3) $Q(F)\, vraie\, et\, Q(G)\, vraie \Rightarrow Q(F * G)\, vraie\, *, =, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow$, alors $Q(F)$ est vraie $\forall\, F \in \mathcal{F}$.

Exemple : $Q(F)$: "F a tout de parenthèses ouvrantes que fermantes " i.e :

$Q(F) =$ " $O(F) = f(F)$" on montre que $Q(F)$ est vraie , $\forall\, F \in \mathcal{F}$ pour cela posons : $O(F) = \sharp$ parenthèses ouvrantes , $f(F) = \sharp$ parenthèses fermantes.

1) $Soit\, F = p \in P,\quad O(F) = f(F) = 0$, donc : $Q(p)$ est vraie.

2) $On\, suppose\, que\, Q(F)\, vraie \Rightarrow Q(\urcorner F)$ vraie.

$$O(F) = f(F)$$

$$O(\urcorner F) = O(F) = f(F) = f(\urcorner F)\, i.e\, :\, O(\urcorner F) = f(\urcorner F)\, i.e\, :\, Q(\urcorner F)\, est\, vraie.$$

3) Supposons que :

$O(F) = f(F)\, et\, O(G) = f(G)$

$$\left.\begin{aligned} O((F * G)) &= O(F) + O(G) + 1 \\ f((F * G)) &= f(F) + f(G) + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow O((F * G)) = f((F * G))\, donc\, Q((F * G))\, est\, vraie.$$

Ss formules :

On définit l'ensemble $sf(F)$ des sous formules de F par :

- $Si\, F = p,\, sf(F) = \{F\}$.
- $Si\, F = \urcorner G,\, sf(F) = \{sf(G)\} \cup \{F\}$.
- $Si\, F = (G * H),\, sf(F) = \{sf(G)\} \cup \{H\} \cup \{F\}$.

e. Quelques règles logiques

Voici quelques résultats très utiles; ils sont valables pour toutes assertions P, Q, R de la classe $\mathscr{A}$ des assertions d'une théorie mathématique quelconque.

(1) $(P \wedge \neg P)$ est une assertion fausse (loi de **non contradiction**).

Tautologie est un terme grec qui signifie "dire la même chose

Les 17 assertions suivantes sont toutes vraies, c'est-à-dire sont des propositions pour toute valeur de vérité de P, Q, R (on les appelle des **tautologies** [1] ou **règles logiques**).

(2) $P \vee \neg P$ (loi du **tiers exclu**)

(3) $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ (double négation)

(4) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ (négation d'une conjonction)

(5) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ (négation d'une disjonction)

(6) $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$; $(P \vee P) \Leftrightarrow P$ (**idempotence** de $\wedge$ et de $\vee$)

(7) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$; $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$ (**commutativité** de $\wedge$ et de $\vee$)

(8) $(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$ (**associativité** [2] de $\wedge$)

$(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$ (**associativité** de $\vee$)

(9) $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$

$(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ (**distributivité**)

(10) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ (loi de **contraposition**)

*l'assertion $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ est appelée **contraposée** de l'assertion $(P \Rightarrow Q)$*

(11) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

(12) $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ (négation de $(P \Rightarrow Q)$)

(13) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (**transitivité** de l'implication)

(14) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$

(15) $((P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P))$

(16) $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$

(règle du **détachement** ou règle **d'inférence** ou règle du **modus ponens**)[1]

(17) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$

(18) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$