Calcul des prédicats

Notion de prédicat ou d'"assertion"

Définition 1

Soit E un ensemble; un **prédicat** A d'une variable $x \in E$ est une application définie sur une partie de E notée $\mathscr{D}(A)$[1,2], appelée **ensemble de définition** de A, et à valeurs dans $\mathscr{A}$[3]. A porte encore le nom de **fonction assertionnelle** de la **variable** x ou, plus rapidement, d'assertion $A(x)$ (de la variable x).

Ainsi si a est un élément de $\mathscr{D}(A)$, en remplaçant x par a, on obtient une assertion, l'assertion $A(a)$.

En ce qui nous concerne, pour simplifier le langage tout en évitant les confusions, le prédicat A sera appelé **"assertion"** $A(x)$ ou encore "assertion" A; on notera la présence des guillemets.

Définition 2

On appelle **domaine de validité** de A, l'ensemble, noté $\mathscr{V}(A)$, des x de $\mathscr{D}(A)$ pour lesquels $A(x)$ est une proposition. Si F est une partie du domaine de validité de A, on dit que *A(x) est vraie sur F* ou encore qu'*on a A(x) sur F*.

On prendra garde de ne pas confondre $\mathscr{D}(A)$ et $\mathscr{V}(A)$.

Exemple 1

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}$, l' "assertion" $(\sqrt{x} > 2)$ de la variable x est définie sur $[0\ ,+\infty[$ (sauf précision supplémentaire car l'ensemble de définition peut toujours être restreint); $(\sqrt{x} > 2)$ n'est pas une assertion si x est un réel < 0. Le domaine de validité de l' "assertion" est $]4\ ,+\infty[$.

Exemple02

Ici $E = \mathbb{R}^2$. L' "assertion" $A(x)$: $(\sqrt{x+2y} > 2)$, des variables x et y, a pour ensemble de définition le demi-plan fermé $\mathscr{D}(A) = \{ (x, y) / x + 2y \geq 0\}$ et pour domaine de validité le demi-plan ouvert $\{ (x, y) / x + 2y > 4\}$.

Remarques

1. Toute assertion peut être considérée comme une "assertion" constante d'une variable x quelconque.

2. $P(x)$ étant une "assertion" d'une variable x, l' "assertion" $\rceil P(x)$ (c'est l' "assertion" : $x \to \rceil P(x)$) est définie elle aussi sur $\mathscr{D}(P)$; $Q(x)$ étant aussi une "assertion" de la variable x, l' "assertion" $P(x) \vee Q(x)$ est définie sur $\mathscr{D}(P) \cap \mathscr{D}(Q)$; il en est de même des "assertions" $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ et $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$.

3. P et Q étant des "assertions", les notations $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftrightarrow Q$ sont strictement réservées au cas particulier $E = \mathscr{D}(P) = \mathscr{D}(Q)$; nous n'utilisons pas ces notations ici. Toutefois signalons qu'il serait aisé de montrer que toutes les règles des pages 14 et 15 sur les assertions s'appliquent aux prédicats, à condition que ces prédicats soient définis sur un même ensemble E (pour cela, il faut, bien sûr, savoir que, par définition, un prédicat P défini sur E est vrai si $P(x)$ est vrai pour tout x de E); on pourrait alors aborder le calcul des prédicats, ce que nous ne ferons pas.

Exemple04

a étant un réel fixé et x une variable réelle, $(\sqrt{x-a} = \sqrt{-x} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2})$ est une "assertion" P définie sur $\{ x \,/\, (x - a) \geq 0 \text{ et } -x \geq 0\} \cap \mathbb{R}$. Donc $\mathscr{D}(P) = [a\,,0]$ si $a < 0$, $\mathscr{D}(P) = \{0\}$ si $a = 0$, et $\mathscr{D}(P) = \emptyset$ si $a > 0$. P est donc une "assertion" vraie sur $\mathscr{D}(P)$ pour toutes les valeurs de a (revoir la table de vérité de l'équivalence et se reporter à l'axiome (5) du paragraphe b suivant).

Prenons maintenant pour Q l' "assertion" $(\sqrt{x-a} = \sqrt{-x})$, on a $\mathscr{D}(P) = \mathscr{D}(Q)$. Q n'est pas vraie sur $\mathscr{D}(Q)$ si $a < 0$ (par exemple si $x = 0$, $\sqrt{x-a} \neq \sqrt{-x}$), et est vraie sur $\mathscr{D}(Q)$ si $a \geq 0$.

Exemple05

L' "assertion" $A(x,y)$ des deux variables x et y :

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow (y^2 = x \text{ et } y \geq 0)\,,$$

est définie sur $\mathscr{D}(A) = [0\,, +\infty[\times \mathbb{R}$; elle est vraie sur $\mathscr{D}(A)$ car pour tout (x, y) de $\mathscr{D}(A)$ on a bien l'équivalence :

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow (y^2 = x \text{ et } y \geq 0);$$

on a donc $((y = \sqrt{x}) \Leftrightarrow (y^2 = x \text{ et } y \geq 0))$ sur $\mathscr{D}(A)$ (voir la définition 2). Par contre l' "assertion" $B(x, y)$:

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x\,,$$

définie sur le même ensemble que A n'est pas une "assertion" vraie sur $\mathscr{D}(B)$; il suffit pour le voir d'exhiber un couple (x, y) de $\mathscr{D}(B)$, tel que $B(x, y)$ soit faux; le couple $(x = 1, y = -1)$ en est un, car on a bien $y^2 = 1 = x$, mais $y = -1 \neq x$.

b. Quantificateurs

Notations

Soit une "assertion" $A(x)$ et soit D une partie de $\mathscr{D}(A)$[1] ; l'assertion

P : pour tout $x \in D$, on a $A(x)$

est notée :

(i) $\forall x \in D$, $A(x)$ [2]

ou

$\forall x \in D$, A

ou encore

$\forall x \in D$ (A).

Le symbole "$\forall$" (transformation de la lettre **A**, initiale du mot anglais "All" (tout)) est appelé **quantificateur universel**.

Si $D = \mathscr{D}(A)$, P s'écrit plus simplement :

(i') $\forall x$, $A(x)$

ou

$\forall x$, A.

Notations

Soit une "assertion" $A(x)$ et soit D une partie de $\mathscr{D}(A)$; l'assertion

Q : il existe x dans D tel qu'on a $A(x)$

est notée :

(ii) $\exists x \in D$, $A(x)$ [1]

ou plus simplement

$\exists x \in D$, A

ou encore

$\exists x \in D$ (A).

Si $D = \mathscr{D}(A)$, Q s'écrit plus simplement

(ii') $\exists x$, $A(x)$

ou

$\exists x$, A.

Proposition

Pour toute "assertion" $A(x)$, si D est inclus dans $\mathcal{D}(A)$, on a :

(1) $\neg(\forall x \in D, A) \Leftrightarrow (\exists x \in D, \neg A)$.

(2) $\neg(\exists x \in D, A) \Leftrightarrow (\forall x \in D, \neg A)$.

Exemple 1

La négation de

$$\exists x \in [0\,,\,1], \sqrt{x} > x\,,$$

est

$$\forall x \in [0\,,\,1], \sqrt{x} \leq x\,;$$

la première assertion est vraie, la seconde est donc fausse.

Exemple 2

L'assertion :

Il existe un unique x de D tel qu'on a $A(x)$,

(ou encore : pour un et un seul x on a $A(x)$)

est notée :

P : $\exists!\, x \in D, A(x)$.

Ce qui peut encore s'écrire :

$$((\exists x \in D\,,\, A(x))\ \text{ et }\ (\forall (x, y) \in D^2\,,\, (A(x) \text{ et } A(y)) \Rightarrow x = y))\,.$$

La négation de P est donc

$\neg P$: $((\forall x \in D\,,\, \neg A(x))$ [1] ou $(\exists (x, y) \in D^2\,,\, (A(x) \text{ et } A(y)) \text{ et } x \neq y))$,

qui signifie que $A(x)$ est fausse pour tout x de D ou que $A(x)$ est vraie pour au moins deux éléments de D.

Le lecteur pourra appliquer la même démarche à l'assertion :

il existe au plus un x de D tel qu'on a $A(x)$.

Exemple 2

L'assertion :

Il existe un unique x de D tel qu'on a $A(x)$,

(ou encore : pour un et un seul x on a $A(x)$)

est notée :

P : $\exists!\, x \in D, A(x)$.

Ce qui peut encore s'écrire :

$((\exists\, x \in D, A(x))$ et $(\forall\, (x, y) \in D^2, (A(x)$ et $A(y)) \Rightarrow x = y))$.

La négation de P est donc

$\neg P$: $((\forall\, x \in D, \neg A(x))$ [1] ou $(\exists\, (x, y) \in D^2, (A(x)$ et $A(y))$ et $x \neq y))$,

qui signifie que $A(x)$ est fausse pour tout x de D ou que $A(x)$ est vraie pour au moins deux éléments de D.

Le lecteur pourra appliquer la même démarche à l'assertion :

il existe au plus un x de D tel qu'on a $A(x)$.

Remarque

Si $D \subset \mathscr{D}(A)$, on a les propositions (3) et (4) suivantes :

(3) $(\exists\, x \in D, A) \Leftrightarrow (\exists\, x, (x \in D$ et $A))$

(4) $(\forall\, x \in D, A) \Leftrightarrow (\forall\, x, (x \in D \Rightarrow A))$.