La corrigée de la série1

Ce qui implique que: les propositions a), b) et d) sont des tautologies mais b) n'est pas une tautologie.

Exercice 02: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, Montrons par un raisonnement par l'absurde que:

(1) Si n^2 est pair, alors n est pair.

Supposons que: n n'est pas pair $\Rightarrow$ n est impair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que: $n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$

$= 2m + 1$ avec $m = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2$ est impair (contradiction avec l'hypothèse).

(2) Si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est premier.

Supposons que n n'est pas premier$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$ tel que: $n = a \cdot b$, $(a, b) \neq (n, 1)$ et $(a, b) \neq (1, n)$.

Alors $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = [(2^a) - 1]\,[P\,(2^a)]$ avec $\deg P\,(2^a) = b - 1$. Mais $[(2^a) - 1] \neq 2^n - 1$ et $[(2^a) - 1] \neq 1$

$\Rightarrow 2^n - 1 = M \cdot [P\,(2^a)]$ avec $M \neq 2^n - 1$ et $M \neq 1 \Rightarrow 2^n - 1$ n'est pas premier (contradiction avec l'hypothèse).

3) Si x et y sont différents alors les nombres $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ sont différents.

Supposons que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \Rightarrow 2y = 2x \Rightarrow x = y$ (contradiction avec l'hypothèse).

4) a et p sont deux entiers naturels; montrer que l'on a :

$$(\ p \text{ premier et } p \text{ divise } a^2\ ) \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

$$(p \text{ premier et } p \text{ divise } a^2) \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

Si p premier et p divise $a^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que: $a^2 = k \cdot p \Rightarrow a \cdot a = k \cdot p$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \text{ divise } p \text{ et } k \text{ divise } a \text{ contradiction avec le fait que } p \text{ est premier.} \\ \text{ou bien: } p \text{divise } a \text{ et } a \text{divise } k \end{cases} \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

(5) si p est premier alors $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel.

Supposons par l'absurde que: $\sqrt{p}$ est un nombre rationnel$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$ avec $b \neq 0$ et $\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow p = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow p \cdot b^2 = a^2$

$\Rightarrow p$ divise a^2 mais p premier$\Rightarrow p$ divise $a \Rightarrow a = k \cdot p$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow b^2 = p \cdot k^2 \Rightarrow p$ divise b^2, mais p premier$\Rightarrow p$ divise b

$\Rightarrow p \neq 1$ est un diviseur commun de a et b contradiction avec $(a, b) = 1 \Rightarrow \sqrt{p}$ est un nombre irrationnel.

(6) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Déduire que: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

D'après (5) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est rationnel$\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

la somme des deux nombres$\Rightarrow 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ contradiction$\Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Montrons par récurrence que:

$$1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

$$2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$3) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!. \text{ avec } n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1 \text{ et } 0! = 1$$

1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1$ est un multiple de $9.(R_n)$

Si $n = 0$, $4^0 - 6 \cdot 0 - 1 = 0 = 0.9 \Rightarrow 4^0 - 6 \cdot 0 - 1$ est un multiple de $9 \Rightarrow R_0$ est vraie.

Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ (l'hypothèse de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$4^{(n+1)} + 6(n+1) - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

En effet:

$$\begin{aligned}
4^{(n+1)}+6(n+1)-1 &= 4\cdot 4^{n}+6n+-1+6 \\
&= 9.k+3.4^{n}+6 \text{ (l'hypothèse de récurrence)} \\
&= 9.k+3(9k-6n+1)+6=9(k+3k-2n+1) \\
&\Rightarrow \ 4^{(n+1)}+6(n+1)-1 \text{ est un multiple de } 9.
\end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n\in\mathbb{N}, 4^{n}+6n-1 \text{ est un multiple de } 9.$$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^{*}, \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).(R_n)$

Si $n=1, \sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2)=1(2)(3)=6$ et $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1}{4}1(2)(3)(4)=6\Rightarrow R_1$ est vraie.

Supposons que (R_n) est vraie pour un $n\in\mathbb{N}^{*}$ (l'hypothèse de récurrence), et montrons que

(R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

En effet:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)+(n+1)(n+2)(n+3) \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)+(n+1)(n+2)(n+3) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)
\end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\,(k+2) = \frac{1}{4} n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,.$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!.\ (R_n)$ avec $n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 1$ et $0! = 1$

Pour $n = 1, 2^{1-1} = 2^0 = 1 \leq 1! = 1 \Rightarrow R_0$ est vraie.

Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ (l'hypothèse de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$2^n \leq (n+1)!$$

En effet:

$$2^n = 2.2^{n-1} \leq 2.n! \leq (n+1)\,.n! = (n+1)!$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!.$$

Exercice 04: A, B et C sont trois parties d'un ensemble$E$. Montrons que:

(1) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C.$

"$\Rightarrow$ " Montrons que: $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$

a) $B \subset A$, si $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \Rightarrow B \subset A$

b) $A \subset C$, si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$ et $x \in C \Rightarrow A \subset C$

$\Rightarrow B \subset A \subset C$

"$\Leftarrow$ "$B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C$

a) $A \cup B \subset A \cap C$, si $x \in A \cup B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \Rightarrow x \in C \\ \text{ou } x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in C \end{array} \right. \Rightarrow x \in A \cap C$

b) $A \cap C \subset A \cup B$, si $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$

(2) $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A \Leftrightarrow A \cup B = B$

a) Montrons que: $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$

En effet:

"$\Rightarrow$ "si $x \in C_E^B \Rightarrow x \in E$ et $x \notin B \Rightarrow x \in E$ et $x \notin A$ car $A \subset B \Rightarrow x \in C_E^A$

"$\Leftarrow$ "si $x \in A \Rightarrow x \notin C_E^A \Rightarrow x \notin C_E^B \Rightarrow x \in B$

b) Montrons que: $C_E^B \subset C_E^A \Leftrightarrow A \cup B = B$

"$\Rightarrow$ "1) $A \cup B \subset B$?

$$\text{si } x \in A \cup B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \Rightarrow x \notin C_E^A \Rightarrow x \notin C_E^B \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{B} \\ \text{ou } \mathbf{x} \in \mathbf{B} \end{array} \right. \Rightarrow x \in B$$

2)$B \subset A \cup B$ évident dans tous les cas.

"$\Leftarrow$ "$C_E^B \subset C_E^A$?

si $x \in C_E^B \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in C_E^A$.

(3) $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$

"$\subset$ "$C_E^{A \cup B} \subset C_E^A \cap C_E^B$?

si $x \in C_E^{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ et $x \notin B \Rightarrow x \in C_E^A$ et $x \in C_E^B \Rightarrow x \in C_E^A \cap C_E^B$

"$\supset$ " $C_E^A \cap C_E^B \subset C_E^{A \cup B}$

si $x \in C_E^A \cap C_E^B \Rightarrow x \in C_E^A$ et $x \in C_E^B \Rightarrow x \notin A$ et $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in C_E^{A \cup B}$.

(4) $B = C \Leftrightarrow (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$)

"$\Rightarrow$ " Montrons que: $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$)?

si $B = C \Rightarrow A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$

"$\Leftarrow$ " Montrons que: $B = C$?

"$\subset$ "si $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cup C$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \ \text{ car on a } x \in B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{C} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ou } \mathbf{x} \in \mathbf{C} \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in C$

"$\supset$ " si $x \in C \Rightarrow x \in A \cup C \Rightarrow x \in A \cup B$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in A \cap C \text{ car on a } x \in C \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{B} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ou } \mathbf{x} \in \mathbf{B} \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in B$

(5) $(A \setminus B) \setminus C \subset A \setminus (B \cup C)$.

si $x \in (A \setminus B) \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ et $x \notin C \Rightarrow x \in A$ et $x \notin B$ et $x \notin C \Rightarrow x \in A$ et $(x \notin B$ et $x \notin C)$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \notin B \cup C \Rightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$

(6) On suppose que:$A \cap B = A \cup C$.A-t-on $B = C$.

Non car par exemple: $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 4\}$ et $C = \{1, 2\}$ on a: $A \cap B = A \cup C$.mais

$B \neq C$.

Soient E un ensemble non vide, et $P\ (E)$ l'ensemble de ses parties. On suppose que $card$ $E = n$.

Montrer par récurrence que:

$$card\ P\ (E) = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Par récurrence:

1ère étape: Pour un ensemble qui contient un seul élément par exemple: $E = \{a\} \Rightarrow P$ $(E) = \{\varnothing, \{a\}\}$

$\Rightarrow card\ P\ (E) = 2^1 = 2$

donc la relation est vraie pour $n = 1$

2ème étape: supposons que pour un ensemble A_n qui contient n éléments alors: $card\ P$ $(A_n) = 2^n$

et montrons que pour un ensemble A_{n+1} qui contient $n+1$ éléments alors: $card\ P\ (A_{n+1}) = 2^{n+1}$

En effet: si on a un ensemble A_{n+1} qui contient $n+1$ éléments alors: l'ensemble des parties contient les sous ensembles

qui ont un lien avec les n premiers éléments qui sont 2^n sous ensembles et on ajoute les mêmes sous enembles mais qui contients

l'élément d'ordre $(n+1)$ à chaque fois.$\Rightarrow card\ P\ (A_{n+1}) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

conclusion:

$$card\ P\ \ (E) = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 06: Soient E un ensemble, $A, B \in P\ (E)$ .Résoudre dans $P\ (E)$ les équations suivantes:

$$(1)\ X \cup A = B \qquad \text{et} \qquad (2)\ X \cap A = B$$

$$(3)\ X - A = B \qquad \text{et} \qquad (4)\ X \bigtriangleup A = B$$

$(1)\ X \cup A = B\ \Rightarrow A \subset B \Rightarrow X = C_B^A \cup Y$ avec$Y \subset A$

Alors l'ensemble des solutions est $\Gamma_1 = \left\{X = C_B^A \cup Y \text{ avec } Y \in P\,(A) \rightarrow \text{ ensemble des parties de } A\right\}$

$(2)\ X \cap A = B \Rightarrow B \subset A \Rightarrow X = B \cup Y$ avec$Y \subset C_E^A$

Alors l'ensemble des solutions est $\Gamma_2 = \left\{X = B \cup Y \text{ avec } Y \in P\left(C_E^A\right) \rightarrow \text{ ensemble des parties de } C_E^A\right\}$

$(3)\ X - A = B \Rightarrow A \cap B = \varnothing \Rightarrow X = B \cup Y$ avec$Y \subset A$

Alors l'ensemble des solutions est $\Gamma_3 = \{X = B \cup Y \text{ avec } Y \in P\,(A) \rightarrow \text{ ensemble des parties de } A\}$

$(4)\ X \bigtriangleup A = B \Rightarrow X = (B - A) \cup (A \cap B)$.