Université de M'sila
Faculté de Mathématiques et de l'informatique
Département de Mathématiques
Module: Introduction à la théorie de groupes

2022/2023

Série 01

Exercice 01:

1. Déterminer lesquels des ensembles des nombres suivants sont des groupes muni des opérations donneés. Pour chaque groupe préciser l'élément neutre et l'élément symétrique de chaque élément.

$a)$ $\{1\}$, multiplication.
$b)$ Les rationnels non nuls, multiplication.
$c)$ Les rationnels, addition.
$d)$ Les rationnels, multiplication.
$e)$ $\{-1, 1\}$, multiplication.
$f)$ $\{-1, 0, 1\}$, addition.
$g)$ L'ensemble des entiers relatifs, multiplication.
$h)$ $M_{10} = \{n/n = 10k, k \in \mathbb{Z}\}$, addition.
$i)$ Les rationnels non nuls, division.
$j)$ L'ensemble des entiers relatifs, soustraction.

2. Vérifier que l'ensemble $\{2^m, m \in \mathbb{Z}\}$ muni de la multiplication est un groupe. De même avec l'ensemble $\{2^m 3^n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ muni de la multiplication.

3. Vérifier que $M(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ avec l'addition des matrices est un groupe.

Exercice 02:

Soit $(G, \cdot)$ un groupe, on définit sur G la relation R comme suit:
$xRy \iff \exists z \in G$ tel que $y = zxz^{-1}$.

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.

2. Déterminer la classe d'équivalence de l'élément $x \in G$ modulo R.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x, y \in G, \left(xyx^{-1}\right)^n = xy^n x^{-1}$.

Exercice 3:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$.

1. Montrer que u_n est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

2. Déterminer les éléments de u_4 et dresser sa table de Cayley.

3. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$ et n divise m alors $u_n \subseteq u_m$.

Exercice 04:

1. On note par $GL(2, \mathbb{R}) = \{M \in M(2, \mathbb{R}) : \det(M) \neq 0\}$.
   Monter que $(GL(2, \mathbb{R}), \times)$ est un groupe.

1. Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ deux éléments de $GL(2, \mathbb{R})$.
   Calculer $ord(M), ord(N), ord(M \times N)$.

Exercice 5:

On considère le groupe $(M, \times)$ avec
$M = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$
et " $\times$ " désigne le produit matriciel.

1. Calculer la table de Cayley de $(M, \times)$.

2. Déterminer l'inverse de chaque élément de $(M, \times)$.

3. Déterminer l'ordre de chaque élément de $(M, \times)$.

4. Déterminer les sous groupes de $(M, \times)$ d'ordre 2.

5. Monter que le groupe $(M, \times)$ est commutatif.

Exercice 6:

Soit S un ensemble non vide. On note par $M(S)$ l'ensemble des applications bijectives de l'ensemble S vers S.

1. Montrer que $(M(S), \circ)$ est un groupe, où " $\circ$ " désigne la composition des applications.
   Soit t un élément d'un ensemble S et soit $H = \{f \in M(S) : f(t) = t\}$.

2. Montrer que H est un sous groupe de $(M(S), \circ)$

Exercice 07:

Soit G un groupe et A une partie non vide de G.
Soit $\langle A \rangle = \left\{x = a_1 a_2 ... a_n / n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall i \in \{1, ..., n\}, a_i \in A \cup A^{-1}\right\}$ avec $A^{-1} = \left\{a^{-1} / a \in A\right\}$.

1. Montrer que $\langle A \rangle$ est le plus petit sous groupe de G contenant A.

Soit $G = (\mathbb{Z}, +)$.

2. Pour $A = \{9, 12\}$, montrer que $\langle\{9, 12\}\rangle = \langle\{3\}\rangle$.
3. Pour $A = \{2, 5\}$, montrer que $\langle\{2, 5\}\rangle = \mathbb{Z}$.

Soit $a\mathbb{Z}, b\mathbb{Z}$ deux sous groupes de $\mathbb{Z}$.

4. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ avec $d = p\,\mathrm{gcd}\,(a, b)$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ avec $m = ppcm\,(a, b)$.

Exercice 8:

1. Montrer que H est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si $H = n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif, on considère deux sous groupes H_1 et H_2 de G et on désigne par $H_1 + H_2 = \{x + y : x \in H_1, y \in H_2\}$.

2. Montrer que $H_1 + H_2$ est le plus petit sous groupe de G contenant $H_1 \cup H_2$ i. e $H_1 + H_2 = \langle H_1 \cup H_2\rangle$.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et H, K deux sous groupes de G. On désigne par : $H \cdot K = \{x \cdot y : x \in H, y \in K\}$.

3. Montrer que $H \cdot K$ est un sous groupe de G, si, et seulement si, $H \cdot K = K \cdot H$.

Exercice 9:

Soit G un groupe fini de cardinal n.

1. Montrer que $\forall x \in G : x^n = e$ où e est l'élément neutre de G.
2. Montrer que si n est premier, alors G est cyclique. déterminer les générateurs de G.
3. Soient H_1, H_2 deux sous groupe finis de G d'ordre respectifs n_1, n_2. Montrer que si $n_1$et n_2 sont premier entre eux, alors l'intersection $H_1 \cap H_2$ est réduite à $\{e\}$.

Exercice 10:

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

1. Montrer que $U_n = \left\{e^{\frac{2\pi ik}{n}}, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n-1\right\}$ est un sous groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.
   Soit l'application $\theta : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (U_n, \times)$ définie par $f\,(k) = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$
2. Montrer que θ est un morphisme surjectif.
3. Calculer $Ker\,(\theta)$.