Chapitre 1

Préliminaires et complément d'analyse

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière de Ω On note $x = (x', x_n)$ où $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On désigne par $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

1.1 Rappel d'analyse vectorielle

On appelle une fonction (champ) scalaire toute fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On appelle une fonction (champ) vetorielle toute fonction F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.
Si $n = 1, m \geq 2$ on dit que F représente une courbe paramétrique.
Si $m \geq 2, n = m - 1$ on dit que F représente une hypersurface (surface si $m = 3$).

L'opérateur ∇ est un dpérateur formel, défini par $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

Définition 1.1. : *Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, différentiable. La divergence de f est : $div F = \nabla.F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$*

Définition 1.2. : *Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, différentiable. La rotation F est :*

$$rot F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right).$$

Définition 1.3. : *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

i) *Le gradient de f est : $grad f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.*

ii) *Le Laplacien de f est : $\Delta f = div(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.*

iii) *La dérivée de f dans la direction indiquée par un vecteur unitaire ν est : $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = \nabla f(x).\nu(x)$.*

Remarque 1.1. : *Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on écrit :*
$\nabla F = (\nabla F_1, \nabla F_2, \ldots, \nabla F_n)$ *(matrice).*
$\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \ldots, \Delta F_n)$ *(vecteur).*

1.2 Domaines réguliers, intégration sur le bord

Nous désignerons par Q, Q_+, Q_0 les sous ensembles suivants :

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1; |x_n| < 1\}$$

$$Q_+ := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1; 0 < x_n < 1\}$$
$$Q_0 := \{(x', 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} : |x'| < 1; \}$$

Définition 1.4. : *On dit que Ω est de classe C^k si pour tout $x \in \Gamma$, il existe un couple (U, φ) ,où U est un ouvert de R^n contenant x, et $\varphi \in C^k(U)$ un difféomorphisme de U dans Q tel que pour $\psi = \varphi^{-1}$ on a :*

1. $\psi \in C^k(\overline{Q})$;
2. $\varphi(U \cap \Gamma) = Q_0$;
3. $\varphi(U \cap \Omega) = Q_+$;

Définition 1.5. : *on notera $\nu(x)$ le vecteur unitaire normal extérieur au point $x \in \Gamma$. Si u est une fonction assez régulière définie sur $\overline{\Omega}$, on a la dérivée normale de u sur Γ :*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu$$

Remarque 1.2. : *Si Ω est de classe C^k, on peut extraire une paramétrisation $x_i = \phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, où ϕ est de classe C^k. Dans ce cas là Γ est le fraphe de ϕ dans un repère orthonormé, et on a : $\nu_y = \dfrac{(\nabla\phi(y), -1)}{\sqrt{1 + (\nabla\phi(y))^2}}$.*

On peut dire que le bord d'un ouvert de classe c^k à une paramétrisation par une fonction de classe c^k.

Définition 1.6. : *Ω est lipschitzien si Γ à une paramétrisation par une fonction lipschitzienne.*

Proposition 1.1. : *Supposons que Ω est de classe C^1. On peut toujours décomposer Γ en une union disjoint, tel que Γ_i est le graphe d'une fonction ϕ_i dans un repère orthonormé comme dans la remarque précédante. On définit l'intégral curvilligne pour une fonction f définie sur Γ comme suivant :*

$$\int_\Gamma f d\sigma(x) = \sum_i \int_{\Gamma_i} f(y, \phi(y)) \sqrt{1 + (\nabla\phi_i(y))^2} dy$$

Théorème 1.1. [***Formule d'Osirogradsky***] : *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, et Γ son bord. Soit F un champ de vecteurs, i.e une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$, à valeurs dans R^n. Alors :*

$$\int_\Omega div\, F(x) dx \int_\Gamma f(x).\nu(x) d\sigma(x)$$

Corollaire 1.1. [***Formule de Green***] : *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, et Γ son bord. Soit u une fonction de classe $C^2(\Omega, \mathbb{R})$, v une fonction de classe $C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Alors :*

$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x) dx + \int_\Omega \nabla v(x).\nabla u(x) dx = \int_\Gamma v(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) d\sigma(x)$$

1.3 problème aux limites, conditions aux limites

Soit l'équation aux dérivées partielles de seconde ordre dans $\mathbb{R}^2$:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

i) Si $b^2 - 4ac > 0$, on dit que l'équation est hyperbolique. Par exemple : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x)$.

ii) Si $b^2 - 4ac = 0$, on dit que l'équation est parperbolique. Par exemple : $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x)$.

ii) Si $b^2 - 4ac < 0$, on dit que l'équation est elliptique. Par exemple : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x)$.

En générale, une équation linéaire de type elliptique (ou simplement elliptique) linéaire sous la forme : $Lu = 0$, ou :

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) = 0.$$

ou : $a_{ij}(x), b_k(x), c(x)$ sont des fonctions ne dépend pas de u.
On écrit parfois :

$$Lu = -\mathrm{div}(a_{ij}(x)\nabla u) + b(x).\nabla u + c(x) = 0.$$

ou la matrice $a_{ij}(x)$, le vecteur $b(x)$ et $c(x)$ ne dépend pas de u.

Définition 1.7. *'n problème aux limites at une équation différentielle (aux dérivées partielles) sur ω, associée aux conditioins sur une partie de Γ.*

On prend quelques conditions aux limites célèbres :

Condition de Dirichlet : $u = g$ sur Γ.

Condition de Neumann : $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g$ sur Γ.

Condition de Robin : $hu + k\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g$ sur Γ.

Condition de mêlée (mixte) : $u = g_1$ sur Γ_1 et $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g_2$ sur Γ_2, avec $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.
ou h, k, g sont des fonctions définies sur Γ et ν est le vecteur normal extèrieur unitaire de Γ.

1.4 Exercices

Exercice 1.1. : *Soit la fonction vectorielle telle $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que : $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$.*
Calculez div $divF$ et $rotF$.

Exercice 1.2. : *Soit la fonction scalaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que : $\varphi(x,y,z) = x^2yz^3$, et la fonction vectorielle $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que : $\varphi(x,y,z) = (xz, y^2, 2x^2y)$.*
Calculer : $\nabla\varphi, \Delta\varphi, div(\varphi.A)$.

Exercice 1.3. : *Etablir, à partir des relations de définition, les formules de composition :*

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(f.g) = f.\nabla g + g.\nabla f$
3. $div(F+G) = divF + divG$
4. $div(f.G) = f.divG + G.\nabla f$

Exercice 1.4. : *Déterminer l'intégration surfacique sur le bord de la boule de centre 0 et de rayon $R > 0$ dans l'espace R^3.*

Exercice 1.5. : *Soit $A(1,0)$ et $B(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Soit G l'ensemble formé du segment $[OA]$, de l'arc de cercle AB de centre O(l'origine), et du segment $[BO]$. On paramétrise $[OA]$ par $(x,0), (0 \leq x \leq 1)$, AB par $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$, et $[BO]$ par (t,t), $(0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}})$.*
Déterminer l'intégration sur G.