Chapitre 2

Formulation variationnelle de problèmes aux limites elliptiques

2.1 Problème variationnel abstrait

Soit V un espace de Hilbert, réel, muni de produit scalaire $(.,.)_V$, et de la norme associée $\|.\|_V$. Soit a une forme bilinéaire sur $V \times V$, et soit F une forme linéaire sur V.

Définition 2.1. : *On dit que la forme bilinéaire a est continue si et seulement si :*

$$\exists M > 0, \forall u, v \in V : |a(u,v)| \leq M\|u\|_V.\|v\|_V$$

Définition 2.2. : *On dit que la forme bilinéaire a est sémytrie si et seulement si :*

$$\forall u, v \in V : a(v,u) = a(u,v)$$

Définition 2.3. : *On dit que la forme bilinéaire a est V-elliptique (où coercive) sur V si et seulement si :*

$$\exists \lambda > 0, \forall v \in V : |a(v,v)| \geq \alpha \|v\|_V^2$$

Théorème 2.1. (***Stapacchia***) : *Soit $\phi \neq K \subset V$ un convexe fermé, et soit $f \in V'$ Considérons le problème suivant : Trouver $u \in K$, solution de*

$$a(u, v-u) \geq < f, v-u > \quad \forall v \in K \tag{2.1}$$

Si la forme bilinéaire a est continue, coercive sur V. Alors, le problème (2.1) admet une solution unique u. De plus, l'opérateur $f \to u$ est lipschitzien, ie. si u_1, u_2 sont deux soluitions assocuées à f_1, f_2 alors ;

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq \frac{1}{\lambda}\|f_1 - f_2\|_{V'}$$

Théorème 2.2. (***Lax-Milgram***) : *Considérons le problème suivant : Trouver $u \in V$, solution de*

$$a(u,v) = < f, v > \quad \forall v \in V \tag{2.2}$$

Si la forme bilinéaire a est continue, coercive sur V. Alors, le problème (2.2) admet une solution unique u. De plus, si u_1, u_2 sont deux soluitions assocuées à f_1, f_2 alors on a :

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq \frac{1}{\lambda}\|f_1 - f_2\|_{V'}$$

Remarque 2.1. : *Si a est symétrique, alors u vérifie la propriété suivante :*

$$\frac{1}{2}a(u,u) - < F, u > = \min_{v \in V}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - < F, v >\right\}$$

Remarque 2.2. : *Les problèmes (2.1), (2.2) sont des problèmes variationnels abstraits.*

2.2 Problèmes aux limites elliptiques linéaires

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, telle que $\Gamma = \partial\Omega$ est de classe C^1 par morceaux.

Définition 2.4. : *Un problèmes aux limites d'ordre 2, elliptiques linéaires est un problème de la forme suivante :*

$$\begin{cases} Lu = f & dans \quad \Omega \\ G(u, D^\alpha u) = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

où α est un multi-indice, vérifie $\|\alpha\| \leq 2$, L est l'opérateur suivant :

$$-div(a(x)\nabla u) + b(x).\nabla u + c(x)u$$

$a(x)$ est une matrice $n \times n, b(x)$ est une fonction vectorielle, $c(x)$ est une fonction scalaire.

Exemple 2.1. :

1. *Si $a = I_n, b = 0, c = 0$ on trouve : $Lu = -\Delta u$, opérateur de Laplace.*
2. *Si $a = \alpha I_n, c = \beta$ on trouve : $Lu = -\alpha\Delta u + \beta u$.*

Remarque 2.3. :

1. *Si $G(u, D^\alpha u) = u - g(x)$, on dit que le problème (2.3) est un problème de Dirichlet.*
2. *Si $G(u, D^\alpha u) = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - g(x)$, on dit que le problème (2.3) est un problème de Neuman.*
3. *Si $G(u, D^\alpha u) = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + u$, on dit que le problème (2.3) est un problème de Robin.*

Dorénavant, on suppose que $a = I_n, b(x) = 0$, $c(x) = \alpha > 0\,(\text{constant})\,, G(u, D\alpha^u) = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u - g(x)$.

Le problème (2.3) devient comme suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = g(x) & \text{sur} \quad \Gamma \end{cases} \tag{2.4}$$

Définition 2.5. : *Une solution classique du problème* (2.4) *est une fonction u de classe C^2 sur Ω, satisfait* (2.4).

Nous donnons maintenant, une formulation variationnelle formel du problème (2.4) (d'aprés la formule de Green) :

$$\int_\Omega (\nabla u.\nabla v + \alpha u.v)dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma(x) = \int_\Omega f.vdx \quad \forall v \in V. \tag{2.5}$$

où v est une fonction que l'on choisie selon la régularité de f, et les conditions aux limites.

La fonction v est dite une fonction test.

2.3 Problème de Dirichlet

Définition 2.6. : *On appelle problème de Dirichlet homogène le problème suivant :*

Trouver une fonction u, définie sur $\overline{\Omega}$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & dans \quad \Omega \\ u = 0 & sur \quad \Gamma \end{cases} \tag{2.6}$$

Définition 2.7. : *Une solution faible du problème* (2.6) *est une fonction* $u \in H_0^1(\Omega)$, *satisfait :*

$$\int_\Omega (\nabla u.\nabla v + \alpha u.v)dx = \int_\Omega f.vdx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.7}$$

Théorème 2.3. (***Existence et unicité***) : *Pour toute* $f \in L^2(\Omega)$, *il existe une solution unique* $u \in H_0^1(\Omega)$ *du problème* (2.7). *De plus, u s'obtient par :*

$$\min_{v\in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 + \alpha v^2)dx - \int_\Omega f.vdx \right\}$$

Définition 2.8. : *Soit* $g \in C(\Gamma)$. *On appelle problème de Dirichlet non homogène le problème suivant :*
Trouver une fonction u, définie sur $\overline{\Omega}$ *telle que :*

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & dans \quad \Omega \\ u = g & sur \quad \Gamma \end{cases} \tag{2.8}$$

Proposition 2.1. : *Il existe* $\widetilde{g} \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *telle que :* $\widetilde{g} = g$ *sur* Γ.

Soit maintenant, l'espace $K = \{v \in H^1(\Omega) : v - \widetilde{g} \in H_0^1(\Omega)\}$.

Théorème 2.4. (***Existence et unicité***) : *Pour toute* $f \in L^2(\Omega)$, *il existe une solution unique* $u \in K$ *du problème* (2.7). *De plus, u s'obtient par :*

$$\min_{v\in K} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 + \alpha v^2)dx - \int_\Omega f.vdx \right\}$$

Théorème 2.5. (***Régularité***) : *Soit u une solution fable des problèmes* (2.6), (2.8). *Alors ;*

1. *Si* Ω *est de classe* $C^2, f \in L^2(\Omega)$; *alors,* $u \in H^2(\Omega)$, *et on a :* $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$.
2. *Si* Ω *est de classe* $C^{m+2}, f \in H^m(\Omega)$; *alors,* $u \in H^{m+2}(\Omega)$, *et on a :* $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$.
   En particulier, si $m > \frac{n}{2}$; *alors,* $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
3. *Si* Ω *est de classe* $C^\infty, f \in C^\infty(\Omega)$; *alors,* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

2.4 Problème de Neumann

Définition 2.9. : *On appelle problème de Neumann homogène le problème suivant :*
Trouver une fonction u, définie sur $\overline{\Omega}$ *telle que :*

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & sur \quad \Gamma \end{cases} \tag{2.9}$$

Définition 2.10. : *Une solution faible du problème* (2.6) *est une fonction* $u \in H^1(\Omega)$, *satisfait :*

$$\int_\Omega (\nabla u.\nabla v + \alpha u.v)dx = \int_\Omega f.v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.10}$$

Théorème 2.6. (***Existence et unicité***) : *Pour toute* $f \in L^2(\Omega)$, *il existe une solution unique* $u \in H^1(\Omega)$ *du problème* (2.10). *De plus, u s'obtient par :*

$$\min_{v\in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 + \alpha v^2)dx - \int_\Omega f.vdx \right\}$$

Théorème 2.7. (***Régularité***) : *Soit u une solution faible du problème* (2.10). *Alors ;*

1. *Si* Ω *est de classe* $C^2, f \in L^2(\Omega)$; *alors,* $u \in H^2(\Omega)$, *et on a :* $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$.
2. *Si* Ω *est de classe* $C^{m+2}, f \in H^m(\Omega)$; *alors,* $u \in H^{m+2}(\Omega)$, *et on a :* $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$.
   En particulier, si $m > \frac{n}{2}$; *alors,* $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
3. *Si* Ω *est de classe* $C^\infty, f \in C^\infty(\Omega)$; *alors,* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

2.5 Exercices

Exercice 2.1. : *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, et soit le problème suivant :*

$$\begin{cases} -u''(x) = f & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Montrer que l'équation (2.11) admet une solution unique, donné par la formule :

$$\forall x \in [0,1] : \quad u(x) = x\int_0^1 f(t)(1-t)dt - \int_0^1 f(t)(x-t)dt$$

Exercice 2.2. : *Pour $f \in L^2(]0,1[)$, on considère le problème suivant :*
Trouver u solution de :

$$\begin{cases} -u'' = f & dans \quad]0,1[\\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

1. *Montrer que si u est une solution de problème (2.12), alors : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$*
2. *Soit l'espace : $V = \{v \in H^1(]0,1[) : \displaystyle\int_0^1 v(x)dx = 0\}$. Montrer que V est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire de $H^1(]0,1[)$.*
3. *Montrer que le problème (2.12) admet une solution unique dans l'espace V.*
4. *Montrer que si u est une solution du problème (2.12), alors : il existe $c \in \mathbb{R}$, et $\widetilde{u} \in V$ solution de (2.12), tels que $u = \widetilde{u} + c$*

Exercice 2.3. : *Soit $\Omega =]a,b[\times]c,d[\subset \mathbb{R}^2$. Considérons le problème suivant :*
Trouver u solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & dans \quad \Omega \\ u(a,y) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(b,y) = 0 & si \quad c < y < d \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,c) = 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,d) = x & si \quad a < x < b \end{cases} \tag{2.13}$$

Etudier le problème variationnel associé à ce problème.

Exercice 2.4. : *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, f \in L^2(\Omega), g \in\in L^2(\Gamma)$. On considère le problème suivant :*
Trouver u solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.14}$$

1. *Montrer que si u est une solution de problème (2.14), alors :*

$$\int_\Omega f + \int_\Gamma g = 0$$

Cette condition est connue sous le nom : "condition de compatibilité".

2. *Montrer que le problème (2.14) admet une solution unique sur l'espace :*

$$V = \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u = 0\}$$

Exercice 2.5. : *Pour $f(x), c(x)$ des fonctions numriques sur l'intervalle borné (a, b). On considère le problème suivant :*

Trouver u solution de :

$$\begin{cases} -u'' + c(x)u = f & dans \quad]a, b[\\ u'(a) + \alpha u(a) = d \\ u'(b) + \beta u(b) = f \end{cases} \tag{2.15}$$

1. *Etablir une formulation variationnelle associée au problème* (2.15).

2. *Donner les conditions pour avoir existence et unicité de la solution de cette formulation variationnelle.*

Exercice 2.6. : *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2, f \in L^2(\Omega), F$ une fonction vectorielle régulière de Ω vers $\mathbb{R}^2$, telle que dans, $F = 0$ dans Ω. On considère le problème suivant :*

Trouver u solution de :

$$\begin{cases} F.\nabla u - \Delta u = f & dans \quad \Omega \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.16}$$

1. *Etablir une formulation variationnelle associée au problème* (2.15).

2. *Etudier l'existence et unicité.*