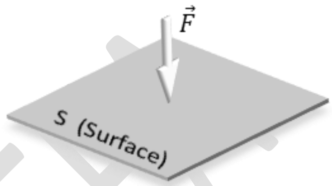
Chapitre 2

Statique des fluides

Partie a : Pression dans un fluide

2.1 Notions et définitions

La statique des fluides est la science qui étudie les conditions d'équilibre des fluides au repos. Plus précisément, elle concerne toutes les situations des fluides en statique et en pseudo-statique. Les grandeurs en jeu sont uniquement la pression, la force de pression et la poussée d'Archimède.



Pression statique (P) : se définit comme le quotient d'une force ($\vec{F}$) par une surface (S).

- Une pression uniforme appliquée sur une surface (S), est la force $\vec{F}$ agis perpendiculairement à l'unité de surface :

$$P = \frac{|F|}{S} \qquad [N/m^2] \quad ou \quad [Pa]\ (Pascal) \qquad (2\text{-}1)$$

- Quand la pression n'est pas uniforme sur S, c.-à-d., la force agissante sur S est variable, et pour garder la notion de la pression, nous utilisons les définitions de force élémentaire et de surface élémentaire ΔS :

$$P = \lim_{\Delta S \to 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta S}\right) = \frac{dF}{dS}$$

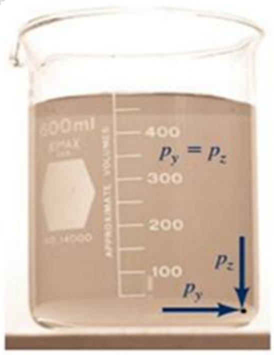
Autres unités

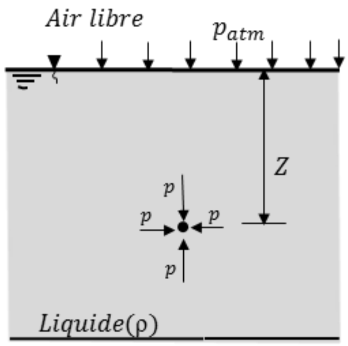
1 atm (pression atmosphérique) = 1,01325 10^5 Pa ≈ 760 mm de mercure

1 bar ≈ 10^5 Pa

Les caractéristiques de la pression

1. La pression d'un fluide agit toujours perpendiculaire à la surface.
2. Par convention, une pression est positive lorsque le sens de l'effet est de l'intérieur du fluide vers la surface étudiée, et vice versa.
3. La pression agissante en un point quelconque (volume élémentaire) dans un fluide au repos est la même dans toutes les directions, voir la figure ci-dessous.





2.2 Pression dans un fluide au repos

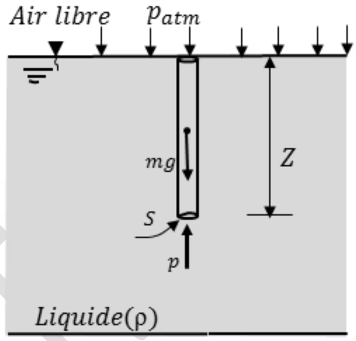
Prenons une colonne de fluide de profondeur Z et de section S. Soit P_{atm} la pression atmosphérique et P la pression à la profondeur Z.

La force exercée sur la section supérieure de la colonne est : $F_1 = P_{atm}.S$, et la force exercée par le fluide sur la section inférieure est : $F_2 = P.S$

En équilibre statique de la colonne de fluide suivant l'axe $\overrightarrow{oz}$

$$F_1 + m.g = F_2$$

Avec : m est la masse de la colonne de fluide. g est l'accélération gravitaire (= 9,81 m/s^2).



$$P_{atm}.S + \rho.S.Z.g = P.S$$

Donc, la pression appliquée sur la section inférieure est :

$$P = P_{atm} + \rho.g.Z \qquad \textit{(2-1)}$$

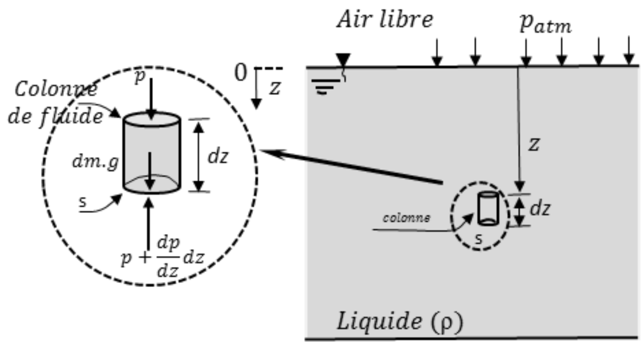
Pour un point de fluide de la section inférieure, la pression est : $P = P_{atm} + \rho.g.Z$

Remarque

La pression ne dépend ni de la forme ni de la largeur de la colonne. Elle augmente donc linéairement en fonction de la profondeur P = f(Z).

Autre méthode démonstrative

Considérons une petite colonne de fluide, voir la figure ci-dessous. La section S_1 soumit à la pression P et la section S_2 soumis à la pression P$+\frac{\partial P}{\partial z}dz$ et puis la gravité sur la colonne.



L'équation suivante est obtenue à partir de l'équilibre statique des forces selon $\overrightarrow{oz}$.

$$PS - \left(P + \frac{dP}{dz}dz\right)S + \rho.g.S.dz = 0$$

S : n'a pas d'effet sur la variation de la pression.

Equation fondamentale de la statique des fluides est :

$$\frac{dP}{dz} = \rho.g$$

Après l'intégral : $P = \rho g \int dz = \rho g z + C^{te}$

2.2.1 Pression absolue et pression relative

Pression absolue : La pression absolue est la pression mesurée par rapport au vide absolu. Elle est toujours positive, voir la figure 2.1. Si le point 0 représente la surface libre du liquide, et z est mesuré vers le bas, l'équation ci-dessus devient :

$$P_a = \rho g z + P_{atm} \qquad \textit{(2-2)}$$

Pression relative (effective) : La pression relative est définie par rapport à la pression atmosphérique P_{atm} existant au moment de la mesure. Cette pression peut être positive si la pression est supérieure à la pression atmosphérique ou négative si la pression est inférieure à la pression atmosphérique. La pression P_{atm} est utilisée comme référence ($P_{atm} = 0$).

$$P_r = \rho g z \qquad \textit{(2-3)}$$

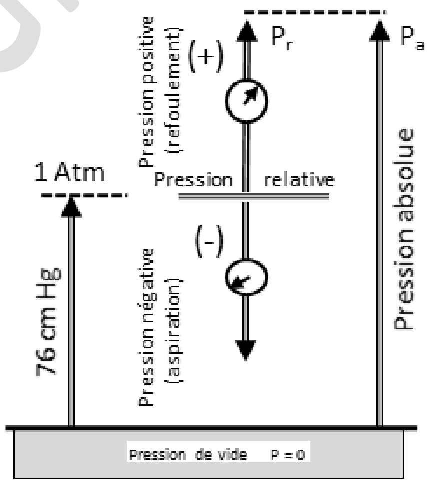


Figure 2.1 : différents repères de la pression

Les deux types de pression correspondent physiquement à la même pression, elles sont simplement exprimées sur des repères différents. La relation suivante permet de passer de l'une à l'autre :

$$P_a = P_r + P_{atm}$$

On parle de refoulement ou d'aspiration quand la pression absolue est supérieure ou inférieure à la pression atmosphérique, respectivement. La pression relative est positive ou négative en cas de surpression ou de dépression, respectivement.

2.2.2 Pression hydrostatique dans les gaz

Equation fondamentale de statique pour les gaz : $\frac{dp}{dZ} = -\rho . g$ (repère de l'axe $\overrightarrow{oz}$ est vers le haut à partir de la surface libre).

Pour les gaz parfaits, la masse volumique est proportionnelle à la pression. Donc l'équation d'état fait : $\rho = \frac{P}{RT}$

Entre ces équations : $\frac{dp}{dZ} = -\rho . g = -\frac{p}{RT} . g$

Séparer les variables et intégrer entre les points (1) et (2)

Equation intégrale : $\int_1^2 \frac{dP}{dZ} = ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = -\frac{g}{R}\int_1^2 \frac{dZ}{T}$

Une approximation dans le cas de l'atmosphère est considérée isotherme ($T = T_0$).

$$p_2 = p_1 \, Exp\left[-\frac{g.(Z_2 - Z_1)}{RT_0}\right] \qquad (2\text{-}4)$$

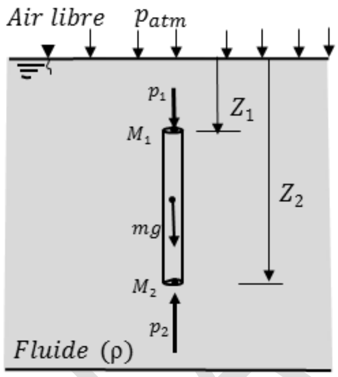
$$ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -k(Z_2 - Z_1) \qquad \text{où} \qquad k = \frac{g}{RT_0}$$

Remarque

Dans la couche troposphère (environ 10 km d'épaisseur par rapport à la mer) la variation de la température est donnée par la formule $T = 288 - 0{,}0065 \times Z$ en [°K] qui peut être intégrée dans l'équation précédente pour donner la variation de la pression ? Voir la figure A.1.

2.2.3 Différence de pression entre deux points

La différence de pression entre deux points situés à des niveaux différents d'un fluide est donnée par :



Suivant la formule (2-1), la pression au point M_1 est :

$P_1 = \rho\,.\,g\,.\,Z_1$, la pression au point M_2 est :

$P_2 = \rho\,.\,g\,.\,Z_2$

Donc, la différence de pression entre les points M_1 et M_2 est :

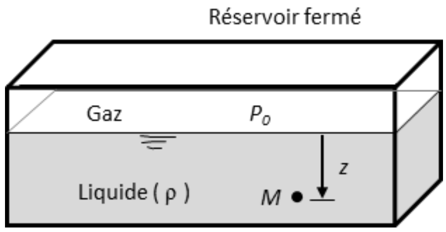
$$P_2 - P_1 = \rho\,.\,g\,.\,(Z_2 - Z_1) \qquad (2\text{-}5)$$

Remarque

Pour exprimer la différence de pression entre deux points, on commence par le point le plus bas, pour garder le signe positif de la différence.

2.2.4 Système fermé

D'après le théorème de Pascal (1623-1662), une pression (P_0) exercée sur un liquide dans un réservoir fermé, cette pression est transmise intégralement à toutes les parties du liquide et aussi sur les parois du récipient.



La pression au point M dans un système fermé est donnée par la formule suivante :

$$P = P_0 + \rho g z \qquad (2\text{-}6)$$

P_0 est la pression du gaz dans le réservoir.

Application du théorème de Pascal :

Presse hydraulique et système de freinage hydraulique

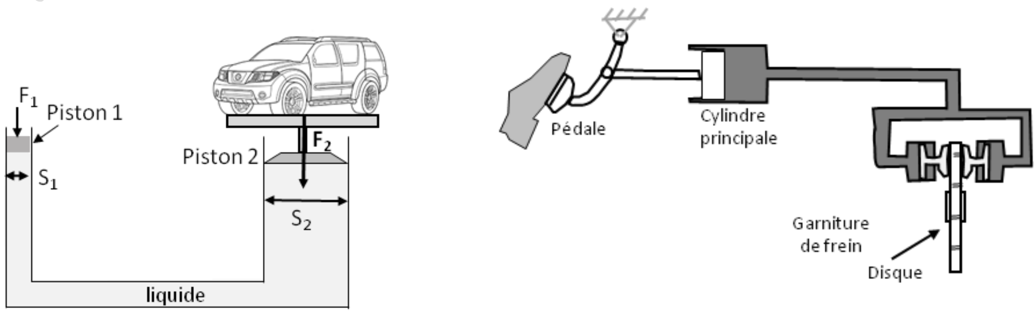


Figure 2.2 : Mode de fonctionnement d'un système de freinage et d'une presse hydraulique.

Parmi les applications du théorème de Pascal, la presse hydraulique (pont élévateur), voir la figure. Comme la pression est la même partout, dans le cas d'équilibre, on peut écrire dans les deux côtés de la presse hydraulique :

La pression interne : $P = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$

D'où : $$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \qquad (2\text{-}7)$$

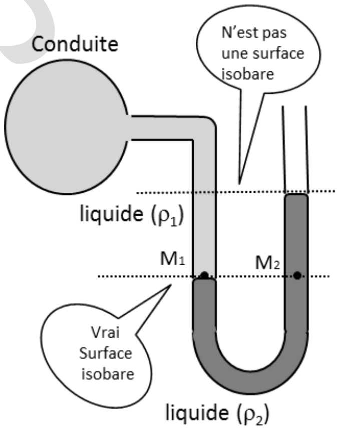
Donc, une faible force F_1 agissant sur une petite surface S_1 du piston 1 équilibre une grande force F_2 agissant sur une grande surface S_2 du piston 2.

2.2.5 Surface isobare

Une surface isobare lorsque la pression est la même en tout point situé à la même profondeur par rapport à une surface libre (ou de séparation), voir la figure.

La surface isobare doit remplir les conditions suivantes :

Les points de la surface doivent être en contact par le même liquide et en continuité.



Applications

1. Cas statique parfait

- Connexion des vases par le même liquide, la surface libre est considérée comme surface isobare. Dans la vie pratique, cette technique est utilisée pour maintenir le niveau horizontal.

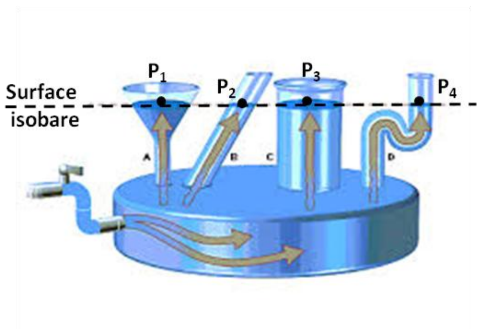


Figure 2.3 : Principe de la règle de surface isobare.

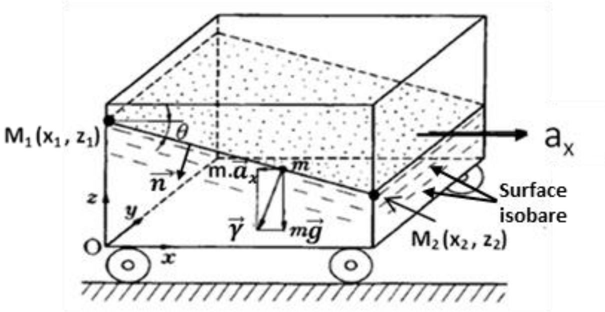
2. Cas pseudo-statique

- **La pression dans un récipient en mouvement accélérant** :

Considérant l'état d'un fluide contenu dans un récipient en mouvement uniformément varié (a_x = Ct), voir la figure.

Avec la nouvelle composante d'accélération a_x . Le liquide se déplace comme un corps rigide. La pente de la surface libre est donnée par l'expression suivante :

$$\tan\ (\theta) = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} = \frac{a_x}{g}$$

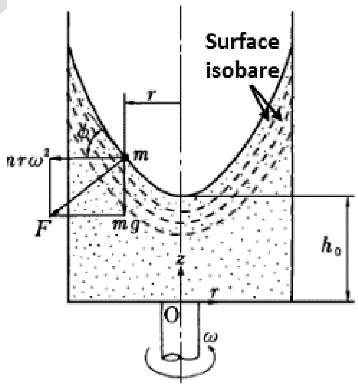


La variation de la pression suivant le normal ($\vec{n}$) de la surface libre est :

$$\frac{dP}{dn} = \rho.\gamma = \ \rho.(g^2 + {a_x}^2)^{1/2}$$

- **Surface parabolique de révolution**

Un cylindre circulaire rempli de fluide tourne uniformément avec une vitesse angulaire ω. La surface libre prend la forme d'un paraboloïde de révolution sous l'effet du mouvement rotationnel.



La variation de pression dans la direction radiale $\overrightarrow{or}$

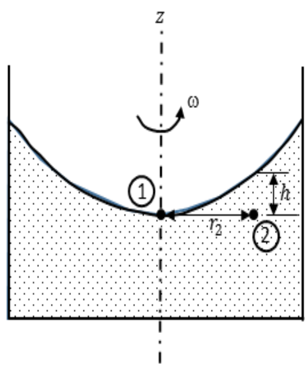
est donnée : $\frac{\partial P}{\partial r} = \ \rho\omega^2 r$

La variation de pression dans la direction verticale ($\overrightarrow{oz}$)

est donnée : $\frac{\partial P}{\partial z} = -\ \rho g$

L'intégral de ces équations donne :

$$P = \ P_{atm} - \ \rho gz + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}$$



La profondeur du point M_2 par rapport à la surface libre est :

$$h = \ \frac{\omega^2 r_2^2}{2g}$$

2.3 Dispositifs de mesure de la pression

Le dispositif utilisé dépend de l'importance des pressions à mesurer. Il existe deux types de dispositifs de mesure des pressions :

Les tubes manométriques : utilisés pour la mesure de pressions relativement faibles.

Les manomètres mécaniques : utilisés pour la mesure de pressions relativement plus élevées.

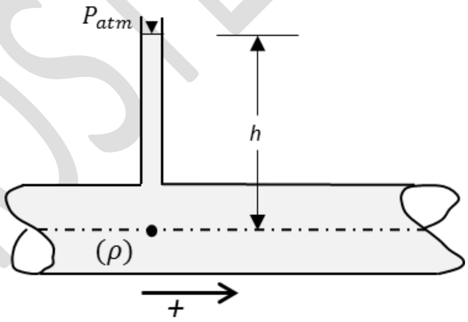
$$P_{jaugé} = P_r = P_a - P_{atm} \qquad \textit{(2-8)}$$

2.3.1 Piézomètres et Manomètres

- **Tube piézométrique**

Formule : $P_{jaugé} \ = \ \rho . g . h$ (2-9)

ρ : est la masse volumique du fluide dans la conduite, h est la hauteur manométrique, voir la figure



Remarque

La bonne position du tube piézométrique doit être perpendiculaire à l'axe de la conduite d'écoulement. Généralement, le tube piézométrique est utilisé pour mesurer les pressions faibles (< 10 m).

- **Tube manomètre en forme de U**

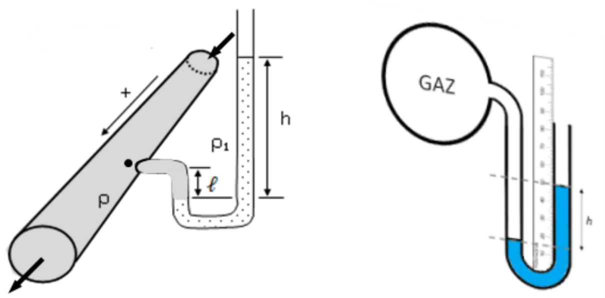


Figure 2.4 : Manomètre en forme de U mesure la pression d'un écoulement dans une conduite.

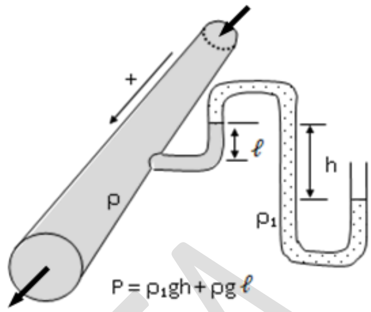
- Si $\rho_1 > \rho$, le manomètre utilisé pour les pressions élevées :

ρ_1 : est la masse volumique du fluide de référence utilisé dans le tube manométrique.

Formule : $$P_{jaugé} = \rho_1 . g . h - \rho . g . \ell \qquad (2\text{-}10)$$

Remarque

Si le fluide de masse volumique (ρ) est un gaz, sa densité est négligeable devant celle du liquide manométrique



- Si $\rho_1 < \rho$, le manomètre utilisé pour les pressions faibles :

Formule : $$P_{jaugé} = \rho_1 . g . h + \rho . g . \ell \qquad \textit{(2-11)}$$

- **Manomètres différentiels**

Ils mesurent la différence de pression entre deux sections transversales d'une conduite principale.

- Si $\rho_1 > \rho$, le manomètre utilisé pour les pressions élevées (Manomètre réducteur), voir la figure.

Formule : $$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1\right) . \Delta h_1 = K . \Delta h_1 = \Delta h \qquad (2\text{-}12)$$

K : Constante manométrique.

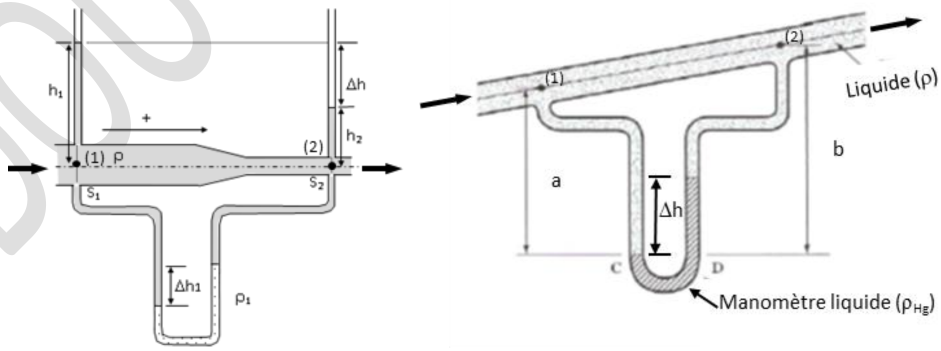
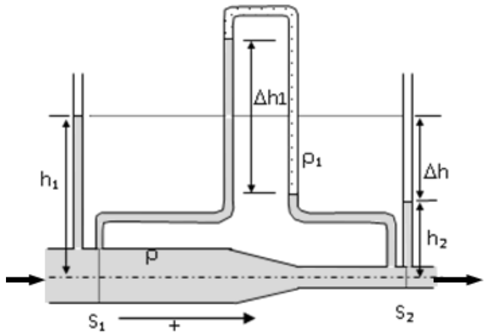


Figure 2.5 : Manomètre différentiel mesure la différence de pression d'un écoulement entre deux sections transversales.

- Si $\rho_1 < \rho$, le manomètre est utilisé pour les pressions faibles (Manomètre amplificateur)

Formule : $$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right) . \Delta h_1 = K_1 . \Delta h_1 = \Delta h \qquad \textit{(2-13)}$$

K_1 : Constante manométrique.



2.3.2 Manomètres mécaniques (Bourdon gauge)

L'instrument de Bourdon est fondé sur le principe qu'un tube cylindrique pincé tend à se rectifier et à reprendre une section circulaire lorsqu'il est soumis à une pression interne.

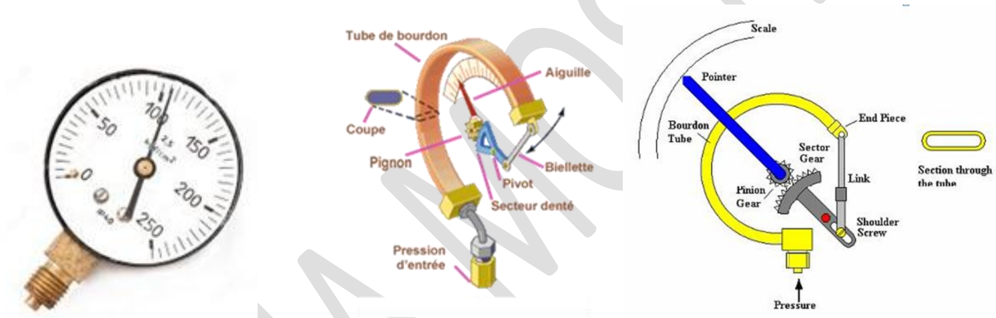


Figure 2.6 : Principe de fonctionnement du manomètre Bourdon

2.4 Principe d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps). *Le centre de poussée est le centre de gravité du volume de fluide déplacé.*

$$F_A = \rho_f . g . V_{dép} \qquad [N] \qquad (2\text{-}14)$$

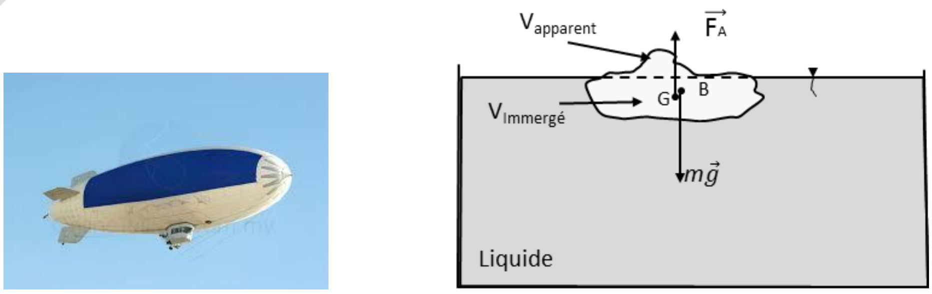


Figure 2.7 : Principe de poussée d'Archimède a) Ballon dirigeable b) Corps flottant.

$V_{dép}$: est le volume de fluide déplacé (ou volume immergé du corps), ρ est la masse volumique du fluide déplacé.

F_A : force de poussée vers le haut, appliquée au centre de gravité du volume immergé B,

ρ_f : masse volumique du fluide [kg/m^3],

$\vec{g}$: accélération gravitaire (9,81 m/s^2).

Applications :

- Mécanisme de la chasse d'eau

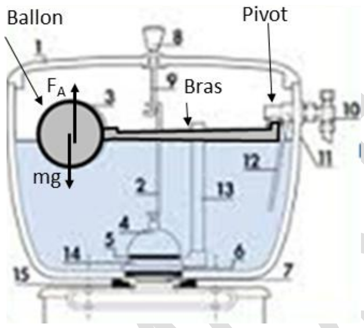


Figure 2.8 : Principe de fonctionnement de la chasse d'eau, basé sur le principe d'Archimède.

- Principe de fonctionnement d'un quai flottant

Figure 2.9 : Quai flottant basé sur le principe d'Archimède

2.3.1 Stabilité des corps flottants et immergés

- **Corps immergés**
  Pour vérifier la stabilité, il faut assurer l'équilibre statique :

$$\sum \overrightarrow{F_{orces}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum M_{oments} = 0$$

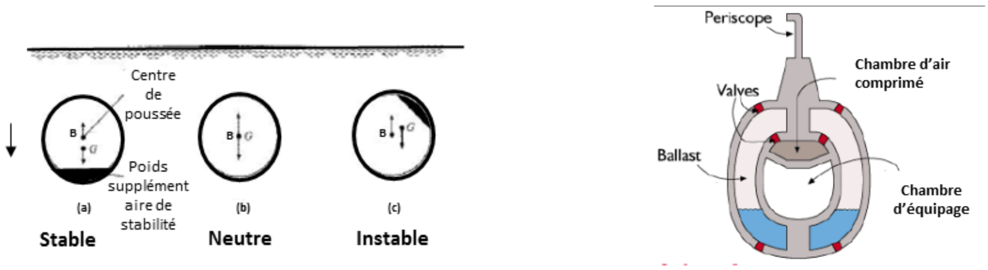


Figure 2.10 : Corps immergés a) boule d'équilibre
b) Principe d'immersion/émersion des sous-marins

- **Corps flottants**

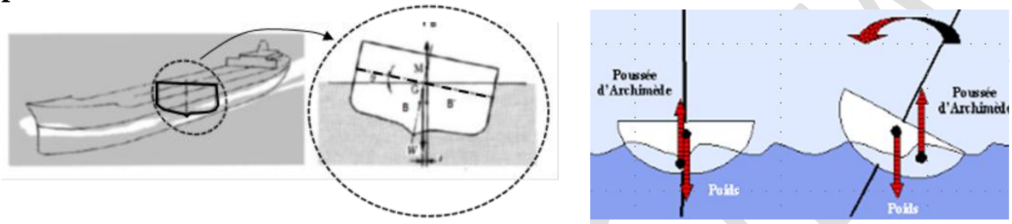


Figure 2.11 : Principe d'équilibre d'un navire

Figure 2.12 : a) Equilibre d'un kayak *b) Déséquilibre d'un navire.*

Les conditions d'équilibre sont résumées par la règle de la taille métacentrique ($\overline{GM}$) :

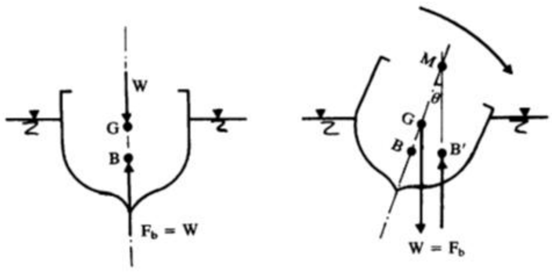
$$\overline{GM} = \overline{BM} - \overline{BG} = \frac{I}{V} - \overline{BG} \qquad (2\text{-}15)$$

I : Moment d'inertie de la section étudiée.

V : Volume immergé ou volume déplacé.

$\overline{GM} < 0$ État de flotteur est instable.

$\overline{GM} > 0$ État de flotteur est stable.



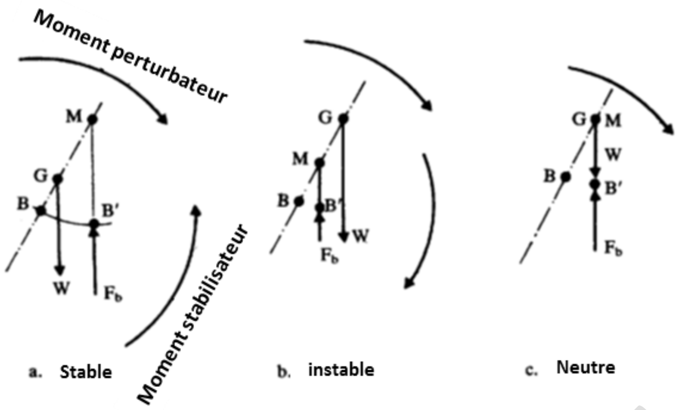


Figure 2.12 : Conditions de stabilité d'un corps flottant.

2.5 Résume des formules importantes du chapitre

Equation fondamentale de statique des liquides	$\frac{dP}{dz} = \rho . g$	
Pression absolue	$P_a = \rho g z + P_{atm}$	(2-2)
Pression relative (effective)	$P_r = \rho g z$	(2-3)
Equation fondamentale de statique des gaz	$\frac{dp}{dZ} = -\rho . g$	
Différence de pression entre deux points	$P_2 - P_1 = \rho . g . (Z_2 - Z_1)$	(2-5)
Pression dans un système fermé	$P = P_0 + \rho g z$	(2-6)
Règle de la surface isobare	Les points de la surface doivent être en contact par le même liquide et en continuité.	
Force de poussée d'Archimède	$F_A = \rho_f . g . V_{dép}$	(2-14)