Chapitre 3

ÉTUDE MATHÉMATIQUE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous terminons l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de type elliptique commencée au Chapitre 1. Pour montrer que les problèmes aux limites sont bien posés pour ces e.d.p. elliptiques, c'est-à-dire qu'elles admettent une solution, unique, et dépendant continûment des données, nous suivons **l'approche variationnelle** présentée au Chapitre 1 et nous utilisons les **espaces de Sobolev** introduits au Chapitre 2.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la Section 3.2 nous expliquons en détail le fonctionnement de l'approche variationnelle pour le Laplacien avec divers types de conditions aux limites. Nous démontrons des **résultats d'existence et d'unicité des solutions**. Nous montrons aussi que ces solutions **minimisent une énergie** et qu'elles vérifient un certain nombre de **propriétés qualitatives** très naturelles et importantes du point de vue des applications (principe du maximum, régularité). La Section 3.3 reprend le même programme mais pour d'autres modèles plus compliqués comme celui de **l'élasticité linéarisée** ou celui des **équations de Stokes**. Si la théorie d'existence et d'unicité est très semblable au cas précédent, il n'en est pas de même de toutes les propriétés qualitatives.

3.2 Étude du Laplacien

3.2.1 Conditions aux limites de Dirichlet

Nous considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un ouvert borné de l'espace $\mathbb{R}^N$, et f est un second membre qui appartient à l'espace $L^2(\Omega)$. L'approche variationnelle pour étudier (3.1) est constituée de trois étapes que nous détaillons.

Étape 1 : Établissement d'une formulation variationnelle.

Dans une première étape il faut proposer une formulation variationnelle du problème aux limites (3.1), c'est-à-dire qu'il faut trouver une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$, une forme linéaire $L(\cdot)$, et un espace de Hilbert V tels que (3.1) soit équivalent à :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V. \tag{3.2}$$

Le but de cette première étape est seulement de trouver la formulation variationnelle (3.2) ; on vérifiera l'équivalence précise avec (3.1) plus tard au cours de la troisième étape.

Pour trouver la formulation variationnelle on multiplie l'équation (3.1) par une fonction test régulière v et on intègre par parties. Ce calcul est principalement formel au sens où l'on suppose l'existence et la régularité de la solution u afin que tous les calculs effectués soient licites. A l'aide de la formule de Green (2.22) (voir aussi (1.7)) on trouve

$$\int_\Omega f v\,dx = -\int_\Omega \Delta u v\,dx = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,ds. \tag{3.3}$$

Comme u doit satisfaire une condition aux limites de Dirichlet, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on choisit un espace de Hilbert V tel que toute fonction $v \in V$ vérifie aussi $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Dans ce cas, l'égalité (3.3) devient

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx. \tag{3.4}$$

Pour que le terme de gauche de (3.4) ait un sens il suffit que ∇u et ∇v appartiennent à $L^2(\Omega)$ (composante par composante), et pour que le terme de droite de (3.4) ait aussi un sens il suffit que v appartienne à $L^2(\Omega)$ (on a supposé que $f \in L^2(\Omega)$). Par conséquent, un choix raisonnable pour l'espace de Hilbert est $V = H_0^1(\Omega)$, le sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont les éléments s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.

En conclusion, la formulation variationnelle proposée pour (3.1) est :

$$\text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx \;\forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

Évidemment, nous avons fait un certain nombre de choix pour arriver à (3.5) ; d'autres choix nous auraient conduit à d'autres formulations variationnelles possibles. La justification de (3.5) s'effectuera donc a posteriori : tout d'abord, la deuxième étape consiste à vérifier que (3.5) admet bien une unique solution, puis la troisième étape que la solution de (3.5) est aussi une solution du problème aux limites (3.1) (dans un sens à préciser).

Étape 2 : Résolution de la formulation variationnelle.

Dans cette deuxième étape nous vérifions que la formulation variationnelle (3.5) admet une solution unique. Pour cela nous utilisons le Théorème de Lax-Milgram 1.3.1 dont nous vérifions les hypothèses avec les notations

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx \text{ et } L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

On voit facilement en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ et que L est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. De plus, en vertu de l'inégalité de Poincaré (voir le Corollaire 2.3.12 ; on utilise ici le caractère borné de l'ouvert Ω), la forme bilinéaire a est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \geq \nu \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert (voir la Proposition 2.3.9), toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram 1.3.1 sont satisfaites et on peut donc conclure qu'il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (3.5).

Étape 3 : Équivalence avec l'équation.

La troisième étape (la dernière et la plus délicate) consiste à vérifier qu'en résolvant la formulation variationnelle (3.5) on a bien résolu le problème aux limites (3.1), et à préciser dans quel sens la solution de (3.5) est aussi une solution de (3.1). En d'autres termes, il s'agit d'interpréter la formulation variationnelle et de retourner à l'équation. Pour cela on procède aux mêmes intégrations par parties qui ont conduit à la formulation variationnelle, mais en sens inverse, et en les justifiant soigneusement.

Cette justification est très facile si l'on suppose que la solution u de la formulation variationnelle (3.5) est régulière (précisément si $u \in H^2(\Omega)$) et que l'ouvert Ω est aussi régulier, ce que nous faisons dans un premier temps. En effet, il suffit d'invoquer la formule de Green (2.22) qui nous donne, pour $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_\Omega v \Delta u \, dx$$

puisque $v = 0$ sur le bord $\partial\Omega$. On en déduit alors

$$\int_\Omega (\Delta u + f)\, v \, dx = 0 \quad \forall\, v \in C_c^\infty(\Omega),$$

ce qui implique, en vertu du Corollaire 2.2.2, que $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$, et on a l'égalité

$$-\Delta u = f \text{ presque partout dans } \Omega. \tag{3.6}$$

De plus, si Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, alors le Théorème de trace 2.3.13 (ou plus précisément son Corollaire 2.3.16) affirme que toute fonction de $H_0^1(\Omega)$ a une trace sur $\partial\Omega$ nulle dans $L^2(\Omega)$. On en déduit, en particulier, que

$$u = 0 \text{ presque partout sur } \partial\Omega. \tag{3.7}$$

On a donc bien retrouvé l'équation et la condition aux limites de (3.1).

Si l'on ne suppose plus que la solution u de (3.5) et l'ouvert Ω sont réguliers, il faut travailler davantage (on ne peut plus utiliser la formule de Green (2.22) qui nécessite que $u \in H^2(\Omega)$). On note $\sigma = \nabla u$ qui est une fonction à valeurs vectorielles dans $L^2(\Omega)^N$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit de la formulation variationnelle (3.5) que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\left| \int_\Omega \sigma \cdot \nabla v \, dx \right| = \left| \int_\Omega f v \, dx \right| \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Comme $C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, (3.8) n'est rien d'autre que le critère d'existence d'une divergence faible de σ dans $L^2(\Omega)$ (voir la Définition 2.2.6 et le Lemme 2.2.7) qui vérifie, pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \sigma \cdot \nabla v \, dx = -\int_\Omega \mathrm{div}\sigma v \, dx.$$

On en déduit donc que

$$\int_\Omega (\mathrm{div}\sigma + f)\, v \, dx = 0 \quad \forall\, v \in C_c^\infty(\Omega),$$

ce qui implique, en vertu du Corollaire 2.2.2, que $-\mathrm{div}\sigma = f$ dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent $\mathrm{div}\sigma = \Delta u$ appartient à $L^2(\Omega)$ (rappelons que $\mathrm{div}\nabla = \Delta$), et on retrouve l'équation (3.6). On retrouve la condition aux limites (3.7) comme précédemment si l'ouvert Ω est régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Si Ω n'est pas régulier, alors on ne peut pas invoquer le Théorème de trace 2.3.13 pour obtenir (3.7). Néanmoins, le simple fait d'appartenir à $H_0^1(\Omega)$ est une généralisation de la condition aux limites de Dirichlet pour un ouvert non régulier, et on continuera à écrire **formellement** que $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

En conclusion nous avons démontré le résultat suivant.

Théorème 3.2.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (3.5). De plus, u vérifie*

$$-\Delta u = f \text{ presque partout dans } \Omega, \qquad \text{et } u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.9}$$

Si on suppose en plus que Ω est régulier de classe $\mathcal{C}^1$, alors u est solution du problème aux limites (3.1) au sens où

$$-\Delta u = f \text{ presque partout dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ presque partout sur } \partial\Omega.$$

On appelle la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (3.5) **solution variationnelle** du problème aux limites (3.1). Par un raccourci de langage bien commode, **on dira que l'unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (3.5) est l'unique solution du problème aux limites (3.1)**. Cette appellation est bien sûr justifiée par le Théorème 3.2.2.

La solution de (3.1), que nous venons d'obtenir, ne vérifie *a priori* l'équation et la condition aux limites que dans un sens "faible", c'est-à-dire presque partout (ou même pire pour la condition aux limites si l'ouvert n'est pas régulier). On parle alors de **solution faible** par opposition aux solutions fortes qu'on aurait pu espérer obtenir dans une formulation classique de (3.1). De même, on appelle parfois la formulation variationnelle **formulation faible** de l'équation.

Remarque 3.2.3 En fait, la solution faible peut être une solution forte si le second membre f est plus régulier. Autrement dit, l'équation et la condition aux limites de (3.1) peuvent être vérifiées en un sens classique, c'est-à-dire pour tout $x \in \Omega$, et tout $x \in \partial\Omega$, respectivement. C'est ce qu'on appelle un résultat de régularité pour la solution (voir plus loin le Corollaire 3.2.27). •

Pour que le problème aux limites (3.1) soit bien posé (au sens de Hadamard, il faut en plus de l'existence et de l'unicité de sa solution, montrer que la solution dépend continûment des données. C'est une conséquence immédiate du Théorème de Lax-Milgram 1.3.1 mais nous en donnons un nouvel énoncé et une nouvelle démonstration.

Proposition 3.2.5 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et soit $f \in L^2(\Omega)$. L'application qui à $f \in L^2(\Omega)$ fait correspondre la solution unique $u \in H^1_0(\Omega)$ de la formulation variationnelle de (3.1) est linéaire et continue de $L^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on a*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.10}$$

Remarque 3.2.6 L'inégalité (3.10) est ce qu'on appelle une **estimation d'énergie**. Elle garantit que l'énergie de la solution est contrôlée par celle de la donnée. Les estimations d'énergie sont très naturelles d'un point de vue physique et très utiles d'un point de vue mathématique. •

Démonstration. La linéarité de $f \to u$ est évidente. Pour obtenir la continuité on prend $v = u$ dans la formulation variationnelle (3.5)

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega fu\, dx.$$

On majore le terme de droite à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et on minore celui de gauche par la coercivité de la forme bilinéaire

$$\nu\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

d'où l'on déduit le résultat. □

Nous avons déjà dit que la formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique (c'est, par exemple, le principe des travaux virtuels en mécanique). En fait, la solution de la formulation variationnelle (3.5) réalise le minimum d'une énergie (très naturelle en physique ou en mécanique). Le résultat suivant est une application immédiate de la Proposition 1.3.4.

Proposition 3.2.7 *Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in H^1_0(\Omega)$ par*

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega fv\, dx. \tag{3.11}$$

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution unique de la formulation variationnelle (3.5). Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

Réciproquement, si $u \in H_0^1(\Omega)$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (3.5).

Remarque 3.2.8 La Proposition 3.2.7 repose de manière cruciale sur le fait que la forme bilinéaire de la formulation variationnelle est symétrique. Si cela n'est pas le cas, la solution de la formulation variationnelle ne minimise pas l'énergie (voir le contre-exemple de l'Exercice 3.2.3).

Souvent l'origine physique du Laplacien est en fait la recherche des minima de l'énergie $J(v)$. Il est remarquable que ce problème de minimisation nécessite de la part de la solution u moins de régularité que l'équation aux dérivées partielles (une seule dérivée permet de définir $J(u)$ tandis qu'il en faut deux pour Δu). Cette constatation confirme le caractère "naturel" de la formulation variationnelle pour analyser une équation aux dérivées partielles. •

Exercice 3.2.1 A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.12}$$

où Ω est un ouvert quelconque de l'espace $\mathbb{R}^N$, et $f \in L^2(\Omega)$. Montrer en particulier que l'ajout d'un terme d'ordre zéro au Laplacien permet de ne pas avoir besoin de l'hypothèse que Ω est borné.

Exercice 3.2.2 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème suivant de convection-diffusion

$$\begin{cases} V \cdot \nabla u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et V est une fonction régulière à valeurs vectorielles telle que $\mathrm{div} V = 0$ dans Ω.

Exercice 3.2.3 On reprend les notations et hypothèses de l'Exercice 3.2.2. Montrer que tout $v \in H_0^1(\Omega)$ vérifie

$$\int_\Omega v V \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

Montrer que la solution de la formulation variationnelle du problème de convection-diffusion ne minimise pas dans $H_0^1(\Omega)$ l'énergie

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v V \cdot \nabla v \right) dx - \int_\Omega f v \, dx.$$

3.2.2 Conditions aux limites de Neumann

Nous considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.16}$$

où Ω est un ouvert (non nécessairement borné) de l'espace $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. L'équation de (3.16) est une variante du Laplacien où nous avons ajouté un terme d'ordre zéro afin d'éviter (en premier abord) une difficulté que nous réglerons plus loin au Théorème 3.2.18. L'approche variationnelle pour étudier (3.16) est sensiblement différente de celle présentée à la sous-section précédente dans le traitement des conditions aux limites. C'est pourquoi nous détaillons à nouveau les trois étapes de l'approche.

Étape 1 : Établissement d'une formulation variationnelle.

Pour trouver la formulation variationnelle on multiplie l'équation (3.16) par une fonction test régulière v et on intègre par parties en admettant que la solution u est suffisamment régulière afin que tous les calculs effectués soient licites. La formule de Green (2.22) (voir aussi (1.7)) donne

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x)v(x)\,dx &= \int_\Omega (-\Delta u(x) + u(x))\,v(x)\,dx \\ &= \int_\Omega (\nabla u(x)\cdot\nabla v(x) + u(x)v(x))\,dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)\,ds \\ &= \int_\Omega (\nabla u(x)\cdot\nabla v(x) + u(x)v(x))\,dx - \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)\,ds. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Nous avons utilisé la condition aux limites de Neumann dans (3.17) et il n'est pas nécessaire de l'inscrire dans le choix de l'espace de Hilbert V. Pour que le premier et les deux derniers termes de (3.17) aient un sens il suffit de prendre $V = H^1(\Omega)$ (on utilise le Théorème de trace 2.3.13 pour justifier l'intégrale de bord).

En conclusion, la formulation variationnelle proposée pour (3.16) est : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla v + uv)\,dx = \int_{\partial\Omega} gv\,ds + \int_\Omega fv\,dx \;\forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{3.18}$$

Les étapes suivantes justifieront le choix de (3.18).

Remarque 3.2.11 La principale différence entre la formulation variationnelle (3.18) pour une condition aux limites de Neumann et celle (3.5) pour une condition aux limites de Dirichlet vient de ce que la condition de Dirichlet est inscrite dans le choix de l'espace alors que la condition de Neumann apparaît dans la forme linéaire mais pas dans l'espace. La condition de Dirichlet est dite **essentielle** (ou explicite) car elle est forcée par l'appartenance à un espace, tandis que la condition de Neumann est dite **naturelle** (ou implicite) car elle découle de l'intégration par parties qui conduit à la formulation variationnelle. •

Étape 2 : Résolution de la formulation variationnelle.

Dans cette deuxième étape nous vérifions que la formulation variationnelle (3.18) admet une solution unique. Pour cela nous utilisons le Théorème de Lax-Milgram 1.3.1 dont nous vérifions les hypothèses avec les notations

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx \text{ et } L(v) = \int_{\partial\Omega} gv\, ds + \int_\Omega fv\, dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'aide du Théorème de trace 2.3.13, on voit clairement que a est une forme bilinéaire continue sur $H^1(\Omega)$ et que L est une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$. Par ailleurs, la forme bilinéaire a est manifestement coercive (c'est pour cela qu'on a ajouté un terme d'ordre zéro au Laplacien) car

$$a(v,v) = \|v\|^2_{H^1(\Omega)}\ \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Comme $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert (voir la Proposition 2.3.2), toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram 1.3.1 sont satisfaites et on peut donc conclure qu'il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (3.18).

Étape 3 : Équivalence avec l'équation.

Nous interprétons maintenant la formulation variationnelle (3.18) pour vérifier qu'on a bien résolu le problème aux limites (3.16), dans un sens à préciser. Nous allons supposer que les données sont régulières. Plus précisément nous allons supposer que nous sommes dans les conditions d'application du lemme suivant de régularité que nous admettrons (voir la sous-section 3.2.4 pour des résultats similaires).

Lemme 3.2.13 *Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et g la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. Alors la solution u de la formulation variationnelle (3.18) appartient à $H^2(\Omega)$.*

Grâce au Lemme 3.2.13 on peut utiliser la formule de Green du Théorème 2.3.30

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x)\, ds. \tag{3.19}$$

qui est valable pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. Rappelons que l'intégrale de bord dans (3.19) a bien un sens à cause du Théorème de trace 2.3.28 qui affirme que pour $u \in H^2(\Omega)$ la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ a un sens dans $L^2(\partial\Omega)$. On déduit alors de (3.18) et (3.19) que, pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\Delta u - u + f) v\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) v\, ds. \tag{3.20}$$

Si l'on prend $v \in C_c^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ dans (3.20), le terme de bord disparaît et l'on déduit, en vertu du Corollaire 2.2.2, que $\Delta u - u + f = 0$ dans $L^2(\Omega)$, donc presque partout dans Ω. Par conséquent, le membre de gauche de (3.20) est nul, donc

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) v\, ds = 0\ \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

D'après le Théorème 2.3.5 les fonctions régulières sont denses dans $H^1(\Omega)$. Par conséquent, l'égalité ci-dessus est vraie pour toute fonction v régulière sur $\partial\Omega$, et on déduit d'une version du Corollaire 2.2.2, adaptée au bord $\partial\Omega$, que $\frac{\partial u}{\partial n} - g = 0$ dans $L^2(\partial\Omega)$, et donc presque partout sur $\partial\Omega$. En conclusion nous avons démontré le résultat suivant.

Théorème 3.2.14 *Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et g la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. Il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (3.18). De plus, u appartient à $H^2(\Omega)$ et est solution de (3.16) au sens où*

$$-\Delta u + u = f \text{ presque partout dans } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ presque partout sur } \partial\Omega.$$

Exercice 3.2.5 Démontrer que l'unique solution $u \in H^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (3.18) vérifie l'estimation d'énergie suivante

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right),$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend pas de u, f et g.

Comme dans la sous-section précédente, on peut montrer que la solution de (3.16) minimise une énergie. Remarquons que, si $g = 0$, alors l'énergie (3.22) est la même que celle (3.11) définie pour le Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet (modulo le terme d'ordre zéro). Néanmoins, leurs minima ne sont en général pas les mêmes car on minimise sur deux espaces différents, à savoir $H_0^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$. La Proposition suivante est une application immédiate de la Proposition 1.3.4.

Proposition 3.2.16 *Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in H^1(\Omega)$ par*

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |v|^2 \right) dx - \int_\Omega f v \, dx - \int_{\partial\Omega} g v \, ds. \tag{3.22}$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$ la solution unique de la formulation variationnelle (3.18). Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in H^1(\Omega)} J(v).$$

Réciproquement, si $u \in H^1(\Omega)$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (3.18).

Exercice 3.2.6 On suppose que Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.23}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et g est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. On démontrera l'inégalité suivante (qui généralise celle de Poincaré)

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \right) \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Exercice 3.2.7 On suppose que Ω est un ouvert borné connexe. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du Laplacien avec des conditions aux limites mêlées

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_N \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D \end{cases} \tag{3.24}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, et $(\partial\Omega_N, \partial\Omega_D)$ est une partition de $\partial\Omega$ telle que les mesures superficielles de $\partial\Omega_N$ et $\partial\Omega_D$ sont non nulles. (Utiliser la Remarque 2.3.18.)

Nous revenons maintenant au véritable opérateur Laplacien (sans ajout d'un terme d'ordre zéro comme dans (3.16)) et nous considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.25}$$

où Ω est un ouvert borné connexe de l'espace $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. La difficulté nouvelle dans (3.25) par rapport à (3.16) est qu'il n'existe une solution que si les données f et g vérifient une **condition de compatibilité**. En effet, il est facile de voir que s'il existe une solution $u \in H^2(\Omega)$, alors intégrant l'équation sur Ω (ou bien utilisant la formule de Green (2.22)) on a nécessairement

$$\int_\Omega f(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\,ds = 0. \tag{3.26}$$

Remarquons aussi que si u est solution alors $u + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, est aussi solution. En fait, (3.26) est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution dans $H^1(\Omega)$, unique à l'addition d'une constante près. Remarquons que, si l'ouvert Ω n'est pas connexe, alors il faut écrire (3.26) pour chaque composante connexe de Ω et l'unicité de la solution vaudra à l'addition près d'une constante par composante connexe (avec ces modifications tous les résultats qui suivent restent valables).

Remarque 3.2.17 Physiquement, la condition de compatibilité (3.26) s'interprète comme une **condition d'équilibre** : f correspond à une source volumique, et g à un flux entrant au bord. Pour qu'il existe un état stationnaire ou d'équilibre (c'est-à-dire une solution de (3.25)), il faut que ces deux termes se balancent parfaitement. De même, l'unicité "à une constante additive près" correspond à l'absence d'origine de référence sur l'échelle qui mesure les valeurs de u (comme pour la température, par exemple). •

Théorème 3.2.18 *Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ qui vérifient la condition de compatibilité (3.26). Il existe une solution faible $u \in H^1(\Omega)$ de (3.25), unique à l'addition d'une constante près.*

Démonstration. Pour trouver la formulation variationnelle on procède comme pour l'équation (3.16). Un calcul similaire conduit à

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} gv \, ds + \int_\Omega fv \, dx$$

pour toute fonction test régulière v. Pour donner un sens à tous les termes de cette égalité, on pourrait choisir $H^1(\Omega)$ comme espace de Hilbert V, mais nous ne pourrions montrer la coercivité de la forme bilinéaire. Cette difficulté est intimement liée au fait que, si u est solution, alors $u + C$ est aussi solution. Pour éviter cet inconvénient, on lève l'indétermination de cette constante additive en ne travaillant qu'avec des fonctions de moyenne nulle. Autrement dit, on pose

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega), \int_\Omega v(x) \, dx = 0 \right\}$$

et la formulation variationnelle de (3.25) est :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} gv \, ds + \int_\Omega fv \, dx \ \forall \, v \in V. \tag{3.27}$$

Pour pouvoir appliquer le Théorème de Lax-Milgram à la formulation variationnelle (3.27), la seule hypothèse délicate à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire. Celle-ci s'obtient grâce à une généralisation de l'inégalité de Poincaré, connue sous le nom d'inégalité de Poincaré-Wirtinger : si Ω est borné et connexe, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\|v - m(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \text{ avec } m(v) = \frac{\int_\Omega v \, dx}{\int_\Omega dx}. \tag{3.28}$$

L'inégalité (3.28) se démontre par contradiction comme dans la deuxième démonstration de la Proposition 2.3.10 (nous laissons cela au lecteur en exercice). Comme $m(v) = 0$ pour tout $v \in V$, (3.28) prouve que $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme dans V, équivalente à la norme usuelle $\|v\|_{H^1(\Omega)}$, et donc que la forme bilinéaire est coercive sur V. Finalement, pour montrer que la solution unique de (3.27) est bien une solution du problème aux limites (3.25), on procède comme précédemment lors de la démonstration du Théorème 3.2.14. On obtient ainsi pour tout $v \in V$,

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v \, ds. \tag{3.29}$$

Or, quelque soit $w \in H^1(\Omega)$, la fonction $v = w - m(w)$ appartient à V. En choisissant une telle fonction dans (3.29), en regroupant les termes en facteur de la constante $m(w)$ et en utilisant la condition de compatibilité (3.26) ainsi que l'égalité $\int_\Omega \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$, on déduit donc de (3.29)

$$\int_\Omega (\Delta u + f) w \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) w \, ds \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

On peut donc conclure comme d'habitude que u vérifie bien le problème aux limites (3.25). $\square$

Exercice 3.2.8 Démontrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (3.28).

Exercice 3.2.9 On suppose que Ω est un ouvert borné connexe régulier. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère la formulation variationnelle suivante : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \left(\int_\Omega u \, dx \right) \left(\int_\Omega v \, dx \right) = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall \, v \in H^1(\Omega).$$

Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette formulation variationnelle. Quel problème aux limites a-t-on ainsi résolu ? En particulier, si on suppose que $\int_\Omega f \, dx = 0$, quel problème déjà étudié retrouve-t-on ?

3.2.3 Coefficients variables

Dans les deux sous-sections précédentes nous avons considéré des problèmes aux limites pour l'opérateur Laplacien. On peut facilement généraliser les résultats obtenus à des opérateurs plus généraux, dits elliptiques du deuxième ordre **à coefficients variables**. Ce type de problème est issu de la modélisation des milieux hétérogènes. Si l'on reprend l'exemple de la conduction de la chaleur, dans un milieu hétérogène la conductivité $k(x)$ est une fonction variable d'un point à l'autre du domaine. Dans ce cas, on considère le problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mathrm{div}(k \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.30}$$

où Ω est un ouvert borné de l'espace $\mathbb{R}^N$, et $f \in L^2(\Omega)$. Bien sûr, si $k(x) \equiv 1$, on retrouve le Laplacien. Il est facile de généraliser le Théorème 3.2.2.

Proposition 3.2.19 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On suppose que le coefficient $k(x)$ est une fonction mesurable et qu'il existe deux constantes strictement positives $0 < k^- \le k^+$ telles que*

$$0 < k^- \le k(x) \le k^+ \text{ presque partout } x \in \Omega. \tag{3.31}$$

Alors, il existe une unique solution (faible) $u \in H_0^1(\Omega)$ de (3.30).

Démonstration. Pour trouver la formulation variationnelle on multiplie l'équation (3.30) par une fonction test v et on intègre par parties en utilisant la formule de Green de l'Exercice 1.2.1

$$\int_\Omega \mathrm{div}\sigma(x) v(x) \, dx = -\int_\Omega \sigma(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) \cdot n(x) \, v(x) \, ds,$$

avec $\sigma = k \nabla u$. A cause de la condition aux limites de Dirichlet on choisit $H_0^1(\Omega)$ comme espace de Hilbert, et on trouve la formulation variationnelle de (3.30) :

$$\text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega k \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \;\forall \, v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.32}$$