L1 Maths– Cours Structure Machine 2

Chapitre I : Algèbre de BOOLE et logique combinatoire

Sommaire

Chapitre I : Algèbre de BOOLE et logique combinatoire

I. Eléments de base

1.1 Variable binaire

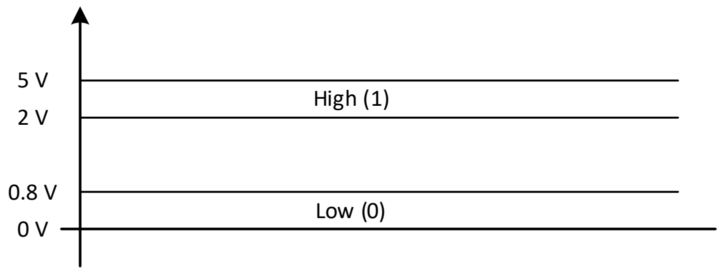
Une variable qui ne peut prendre que l'une de deux valeurs possibles.

1.2 Variable logique

Une variable logique qui peut prendre que l'une de deux valeurs associées au caractère vrai ou faux d'un évènement.

1.3 État logique

Valeur attribuée à une variable logique ; elle peut être Vrai ou Faux. L'état vrai est représenté par "1" : H(High) état haut, et l'état faux par L (Low) état bas. Concrètement, ces deux états sont traduits par des tensions logiques. En technologie TTL par exemple :

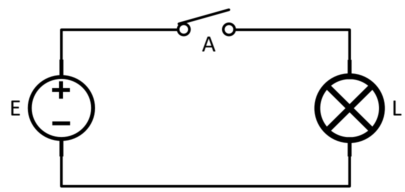


1.4 Fonction logique

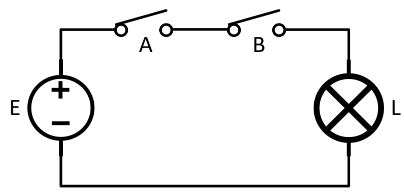
Ensemble de variables logiques reliées par des opérateurs logiques. Une fonction ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.

1.5 Exemples introductifs

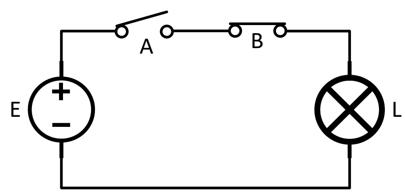
La lampe L ne s'allumera que si l'on actionne l'interrupteur A



Actionner A **<u>et</u>** actionner B



Actionner A **<u>et</u>** **<u>ne pas</u>** actionner B



II. Les opérateurs logiques de base

2.1 L'opérateur logique OU (Inclusif)

L'opération OU (OR) est dite addition logique. La sortie est dans l'état 1 si au moins une des entrées est à l'état 1.

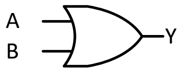
Table de vérité

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

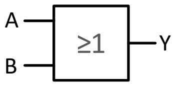
Expression logique

Y = A + B
Y = A OU B
Y = A OR B

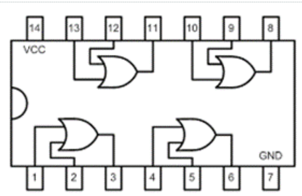
Symbole IEEE



Symbole IEC



Exemple de la série 74
74 32



2.2 L'opérateur logique ET (AND)

C'est la multiplication logique. La sortie est à 1 si les deux entrées (toutes) sont à 1.

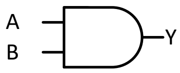
Table de vérité

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

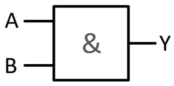
Expression logique

Y = A . B
Y = A ET B
Y = A AND B

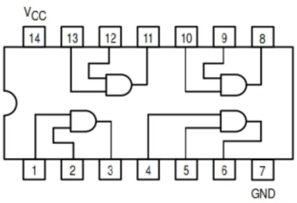
Symbole IEEE



Symbole IEC



Exemple de la série 74
74 08



2.3 L'opérateur logique NON (NOT)

Affecte à toute variable logique sa négation ou son complément.

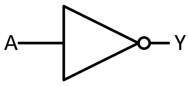
Table de vérité

A	Y
0	1
1	0

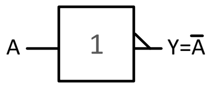
Expression logique

Y = $\overline{A}$
Y = NON A
Y = NOT A

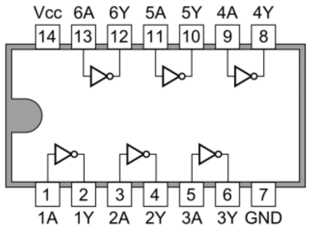
Symbole IEEE



Symbole IEC



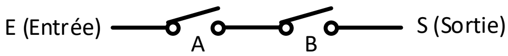
Exemple de la série 74
74 04



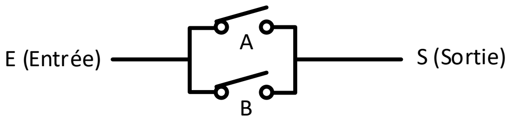
Note : Il existe des circuits intégrés avec des portes logiques (ET, OU) à 4 ou 8 entrées.

III. Application à un réseau électrique

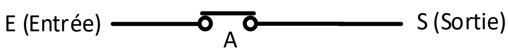
$S = A.B$



$S = A + B$



$S = \bar{A}$



IV. Lois fondamentales de l'algèbre de BOOLE

4.1 Commutativité

$A\,.\,B = B.\,A$ $\qquad$ $A + B = B + A$

4.2 Associativité

$A\,.\,(B.\,C) = (A\,.\,B).\,C = A\,.\,B\,.\,C$ $\qquad$ $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

4.3 Distributivité

Opération ET par rapport à l'opération OU : $A\,.\,(B + C) = (A\,.\,B) + (A\,.\,C)$

Opération OU par rapport à l'opération ET : $A + (B\,.\,C) = (A + B)\,.\,(A + C)$

4.4 Idempotence

$A + A = A$ $\qquad$ $A\,.\,A = A$

4.5 Complémentarité

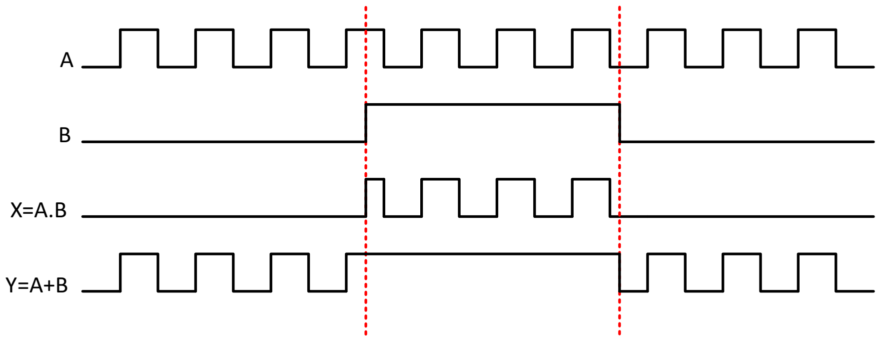
$A + \bar{A} = 1$ $\qquad$ $A\,.\,\bar{A} = 0$

4.6 Eléments neutres et éléments absorbants

$A\,.\,1 = A$ $\qquad$ $A + 1 = 1$

$A\,.\,0 = 0$ $\qquad$ $A + 0 = A$

4.7 Exemple d'application



4.8 Théorèmes de DEMORGAN

Théorème N°1 :

La négation d'un produit de variables est égale à la somme des négations des variables : $\overline{A.\,B.\,C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

Théorème N°2 :

La négation d'une somme de variables est égale au produit des négations des variables : $\overline{A + B + C} = \bar{A}.\,\bar{B}.\,\bar{C}$

V. Evaluation d'une fonction logique

Soit la fonction : $Y = (A + \bar{B})(A + B) + C(\bar{A} + B)$

Cette fonction peut être simplifiée à l'aide des lois énoncées précédemment et être évaluée à l'aide de la table de vérité.

$$Y = (A + \bar{B})(A + B) + C(\bar{A} + B)$$

$$= (A + \bar{B})A + (A + \bar{B})B + C\bar{A} + CB$$

$$= AA + \bar{B}A + AB + B\bar{B} + C\bar{A} + CB$$

$$= A + \bar{B}A + AB + 0 + C\bar{A} + CB$$

$$= A(1 + \bar{B}) + AB + C\bar{A} + CB$$

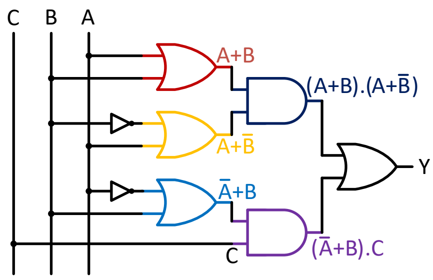
$$= A(1) + AB + C\bar{A} + CB$$

$$= A(1 + B) + C\bar{A} + CB$$

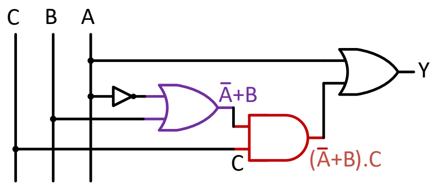
$$= A(1) + C\bar{A} + CB$$

$$= A + C(\bar{A} + B)$$

Nous avons simplifié l'expression de Y, ce qui permet de réduire le nombre de portes logiques nécessaires à l'implémentation de la fonction.



Logigramme de la fonction Y avant la simplification (8 portes)



Logigramme de la fonction Y simplifiée (4 portes)

Il est à remarquer que la fonction Y peut encore être simplifiée davantage de la manière suivante :

$$Y = A + C(\bar{A} + B) = A + C\bar{A} + CB = (A + C)(A + \bar{A}) + CB = A + C + CB = A + C(1 + B) = A + C$$

Ceci nous permet de dresser une table de vérité plus simple :

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{A} + B$	$(\bar{A} + B).C$	$Y = A + (\bar{A} + B).C$	$A + C$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1

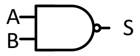
VI. Les autres portes logiques

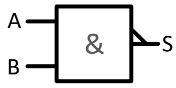
6.1 La porte NAND = NON-ET

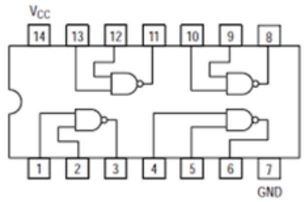
Table de vérité | Expression logique | Symbole IEEE | Symbole IEC | Exemple série 74 7400 : 4 portes NAND

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$S = \overline{A . B}$





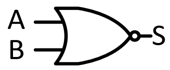


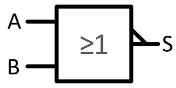
6.2 La porte NOR = NON-OU

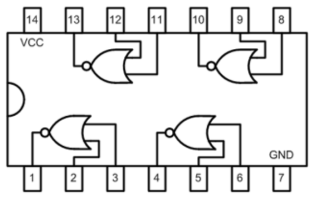
Table de vérité | Expression logique | Symbole IEEE | Symbole IEC | Exemple série 74 7402 : 4 portes NOR

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$S = \overline{A + B}$





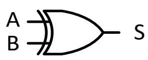


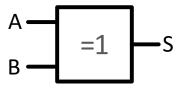
6.3 La porte ou exclusif (XOR)

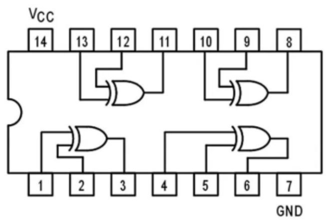
Table de vérité | Expression logique | Symbole IEEE | Symbole IEC | Exemple série 74 7486 : 4 portes XOR

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$S = A \oplus B$







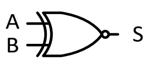
6.4 La porte NON-OU-Exclusif (XNOR)

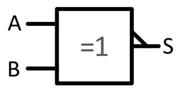
Fonction XNOR, dite aussi fonction égalité

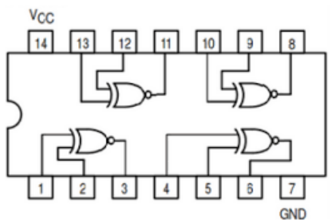
Table de vérité | Expression logique | Symbole IEEE | Symbole IEC | Exemple série 74 74266 : 4 portes XNOR

A	B	S’	S
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$S = \overline{A \oplus B}$

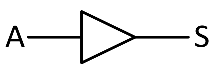






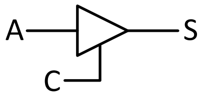
6.5 Les portes à 3 états (3 state gates)

La porte représentée dans le schéma ci-dessous est dite Buffer (Fonction ‘oui’) :



S=A

Un buffer à 3 états est conçu de la manière suivante :



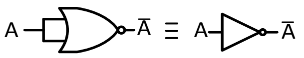
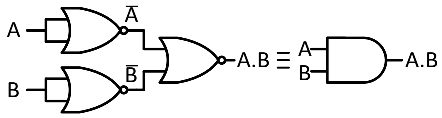
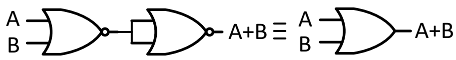
$Si\ C = A \quad S = A$
$Si\ C = 0 \quad S\ est\ en\ Haute\ impédance\ (Hi - Z)$

Ce type de portes permet de couper la liaison dans le cas où l'entrée C est à 0.

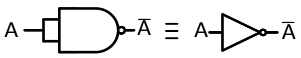
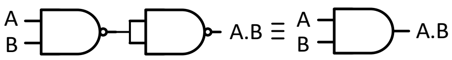
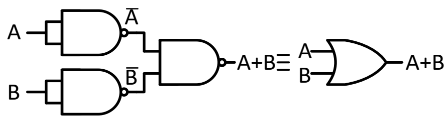
VII. Notion d'élément de connexion universel

Un circuit logique est dit élément à connexion universel s'il permet de réaliser les trois opérations de base (NOT, AND, OR). Il sera donc possible de générer avec, toutes les fonctions logiques. Les portes NAND et NOR sont des éléments de connexion universels. Dans ce qui suit nous montrons comment réaliser les trois portes logiques de base grâce à des portes NOR et NAND.

7.1 Porte NOR

Négation	Opération AND	Opération OR
$\overline{A+A} = \bar{A}$	$A\,.\,B = \overline{\overline{A\,.\,B}} = \overline{\bar{A}+\bar{B}}$	$A+B = \overline{\overline{A+B}}$
		

7.2 Porte NAND

Négation	Opération AND	Opération OR
$A\,.\,A = A \Rightarrow \overline{A\,.\,A} = \bar{A}$	$A.\,B = \overline{\overline{A.\,B}}$	$A+B = \overline{\overline{A+B}} = \overline{\bar{A}\,.\,\bar{B}}$
		

La notion d'élément de connexion universel permet l'implantation de n'importe quelle fonction logique grâce à un seul type de portes.

VIII. Relations de base de l'algèbre de Boole

Les relations qui suivent sont des relations de base de l'algèbre de Boole. Elles permettent d'aider dans la simplification algébrique des fonctions logiques. Les expressions ci-dessous sont des expressions duales deux à deux.

a. $xy + x\bar{y} = x$ — a'. $(x+y).(x+\bar{y}) = x$

b. $x + xy = x$ — b'. $x(x+y) = x$

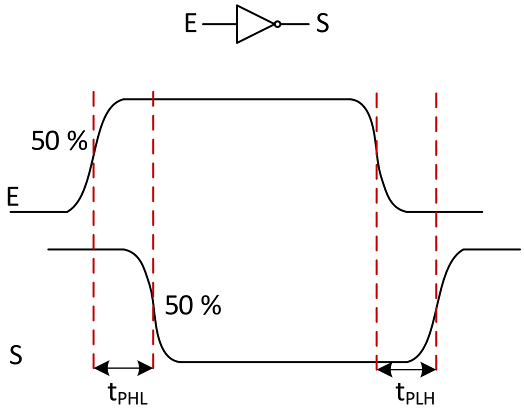
c. $x + \bar{x}y = x + y$ — c'. $x(\bar{x}+y) = xy$

d. $xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z$ — d'. $(x+y).(\bar{x}+z)(y+z) = (x+y).(\bar{x}+z)$

IX. Caractéristiques et paramètres des portes logiques

Les portes logiques présentent des caractéristiques électriques et dynamiques dont les plus importantes :

- Le retard de propagation



t_{PHL} : temps de propagation (retard de propagation) Haut-Bas

t_{PLH} : temps de propagation Bas-Haut

- La tension d'alimentation : plage de tension tolérable pour le fonctionnement du circuit ;
- La consommation : la puissance moyenne consommée par le circuit ;
- Les niveaux logiques des E/S : plages de tensions pour les niveaux logiques haut et bas ;
- La sortance : nombre maximal de portes qui peuvent être connectées à la sortie de la porte ;
- La fréquence max : fréquence maximale de fonctionnement du circuit.