Comme $n_1 = -n_2$ l'intégrale sur l'interface Γ disparaît à cause de la condition aux limites de transmission. D'autre part, si u est défini comme u_1 dans Ω_1 et u_2 dans Ω_2, la condition de transmission $u_1 = u_2$ sur Γ implique que $u \in H^1(\Omega)$. Par conséquent, (3.35) n'est rien d'autre que la formulation variationnelle (3.32). □

3.2.4 Propriétés qualitatives

Dans cette sous-section nous étudions quelques propriétés qualitatives des solutions du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet. Dans toute cette sous-section, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$.

Principe du maximum

Théorème 3.2.22 (Principe du maximum) *Si $f \geq 0$ presque partout dans Ω, alors la solution de (3.1) vérifie $u \geq 0$ presque partout dans Ω.*

Remarque 3.2.23 Le principe du maximum ne fait que traduire une propriété parfaitement naturelle du point de vue physique : par exemple dans le contexte de l'équation stationnaire de la chaleur, si on chauffe ($f \geq 0$), la température intérieure est toujours plus grande que la température au bord ($u \geq 0$). Le principe du maximum reste valable si on remplace le Laplacien par l'opérateur plus général (3.30) à coefficients variables dans $L^\infty(\Omega)$ ou bien si l'on considère le problème (3.16) avec condition aux limites de Neumann. La validité du principe du maximum est fondamentalement liée au caractère "scalaire" de l'équation (c'est-à-dire que l'inconnue u est à valeurs dans $\mathbb{R}$). Ce principe du maximum tombe généralement en défaut si l'inconnue u est à valeurs vectorielles (par exemple pour le système (3.56) de l'élasticité). •

Démonstration. On utilise la formulation variationnelle (3.5) de (3.1) avec $v = u^- = \min(u, 0)$ qui appartient bien à $H_0^1(\Omega)$ en vertu du Lemme 3.2.24 (car $u = u^+ + u^-$). On a

$$\int_\Omega f u^- \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u^- \, dx = \int_\Omega 1_{u<0} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx \geq 0. \tag{3.41}$$

Mais $u^- \leq 0$ et $f \geq 0$ presque partout dans Ω. Par conséquent, tous les termes de (3.41) sont nuls, et comme $u^- \in H_0^1(\Omega)$ on en déduit que $u^- = 0$, c'est-à-dire que $u \geq 0$ presque partout dans Ω. □

Lemme 3.2.24 *Si $v \in H_0^1(\Omega)$, alors $v^+ = \max(v, 0)$ appartient à $H_0^1(\Omega)$ et*

$$\nabla v^+ = 1_{v>0} \nabla v \text{ presque partout dans } \Omega,$$

où $1_{v>0}(x)$ est la fonction qui vaut 1 là où $v(x) > 0$ et 0 ailleurs.