Université de M'sila

Faculté de Maths-Info

Limites et Continuité

L2 Maths

Module: Analyse 4

Série d'exercices n°2

Licence mathématiques-L2 2023

Remarque 1

l'exercice noté par $(\star)$ ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de **TD**

Exercice 1

Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données si possible.

1. $f_1(x,y) = \ln(x+y-1).(\star)$
2. $f_2(x,y) = \sqrt{1-xy}$.
3. $f_3(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.
4. $f_4(x,y,z) = \dfrac{1+x^2}{xyz}$.
5. $f_5(x,y) = \dfrac{\ln y}{\sqrt{x-y}}$.
6. $f_6(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2-y}}{\sqrt{y}}.(\star)$

Exercice 2

Dans chaque cas, déterminez les courbes de niveau des fonctions de deux variables données.

1. $f(x,y) = x+y-1$
2. $f(x,y) = e^{y-x^2}$.
3. $f(x,y) = y-\cos x.(\star)$
4. $f(x,y) = \ln(x-y^2)$.

Exercice 3

Calculer la limite si elle existe dans les cas suivants:

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$.
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$.
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(\star)$.
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{y}\right)$.
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+xy+y^2}$.
8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y-3}{x+y+1}$, $(\star)$.
9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{e^x-1}$.

Exercice 4

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ sauf les points de la première bissectrice $(y=x)$, telle que: $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y}$. Montrer que, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} \frac{\sin x - \sin y}{x-y} = \cos\alpha$.
2. Calculer les limites suivantes
   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.
   (b) $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|_2\to+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(2xy)$.

Exercice 5

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ définie par: $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$.

Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ de trois manières différentes:

1. Par majoration.
2. En utilisant les coordonnées polaires.
3. Selon la définition.

Exercice 6 ★★★

Soit les deux fonctions f, g suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$
2. $g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7 ★★★

Étudier si les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité au point a

1. $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2},\ a(0,0).$
2. $f(x,y)=\dfrac{x-2}{(x-2)^2+y^2},\ a(2,0).$
3. $f(x,y)=\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2},\ a(0,0)\ \ (\star).$

Exercice 8 ★★★

Montrer que les ensembes suivents sont compacts

1. $A=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 9,\Big\}.$
2. $B=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1\Big\},\ (\star).$

Exercice supplémentaire 1 ★★★

Soit la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2+y^2-1, & si\ x^2+y^2>1, \\ -\dfrac{1}{2}x^2, & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.