Exercices Résolus

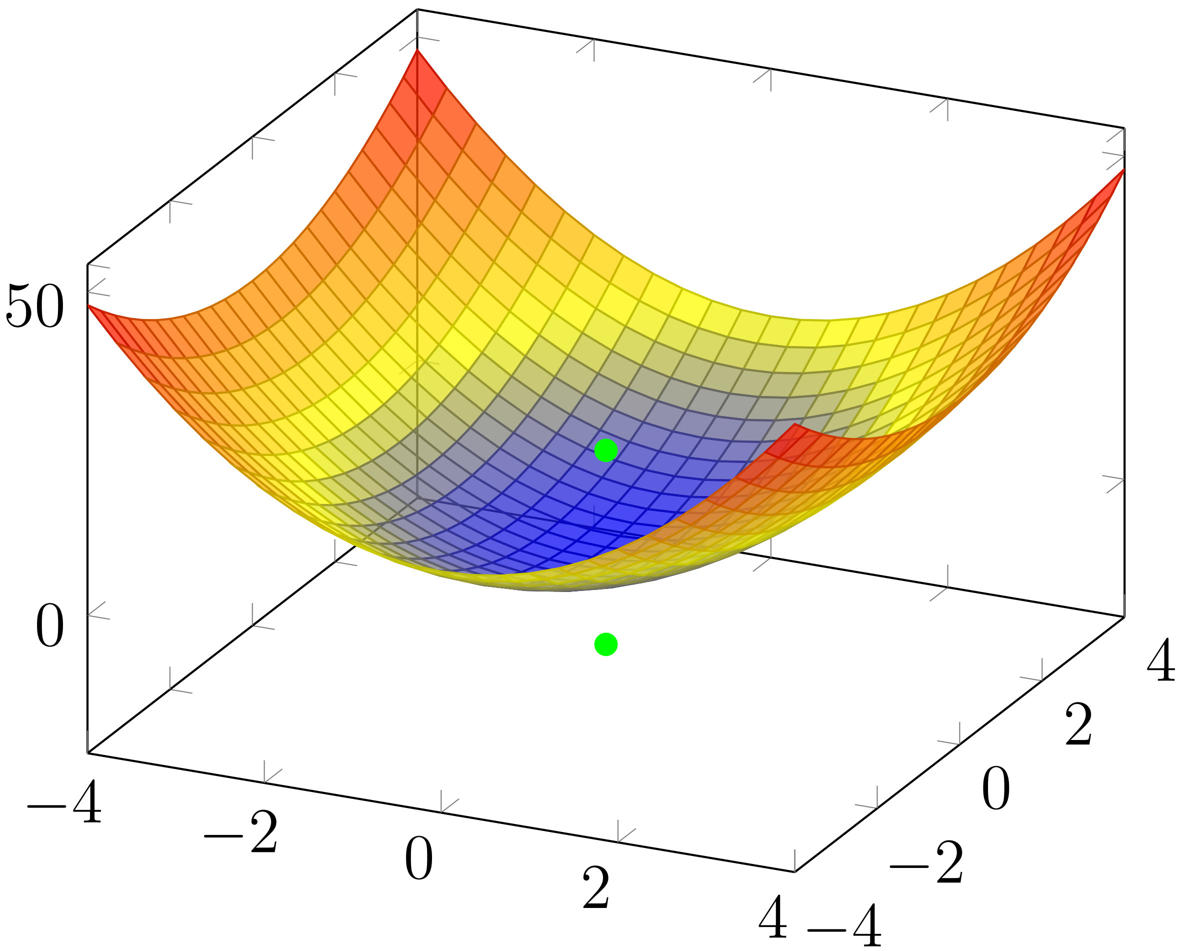
Université de M'sila

Faculté de Mathématiques et d'Informatique

Socle Commun

ANALYSE 4

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRALES MULTIPLES



Licence de mathématiques, L2

Présenté par : Dr. D. Bouafia

Version : 2023

Table des matières

Chapitre 4 Formules de Taylor et Extremums

Chapitre 5 Intégrales multiples

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$\mathcal{V}(x_0)$	: voisinage de x_0.
$f \sim_{x_0} g$	: f et g sont équivalentes au voisinage de x_0.
$f \in C^n(I, \mathbb{R})$	: La fonction f de classe C^n sur I, $(n \in \mathbb{N})$.
f^{-1}	: La fonction réciproque de f.
$D.L$	: Développements limités.

Introduction

Cette polycopié est une tentative de donner un coup de main à nos étudiants, en résolvant en détail certains exercices d'analyse 4 et dans tous les chapitres liés à la polycopié comme la topologie dans l'espaces $\mathbb{R}^n$ et le concept du normes, limites et continuité des fonctions à plusieurs variables, les dérivées partielles et le calcul différentiable, extrémums et théorème d'inversion locale, les intégrales mutiples.
De plus, nous n'avons généralement pas résolu les exercices notés par une étoile ($\star$) ou les exercices supplémentaires et avons laissé le soin au lecteur.
Ce travail, et comme tout travail humain, il n'est pas exempt d'erreurs et de manquements, nous vous demandons donc de nous conseiller et de corriger nos erreurs si possible.

Chapitre 1

Topologie de $\mathbb{R}^n$

1.1 Exercices du série 1

Remarque 1.1

L'exercice noté par $(\star)$ ou supplémentaire ils sont généralement laissés au lecteur.

Exercice 1.1

Soit a, b deux réels strictement positifs. Pour tout $u(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$\|u(x,y)\| = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

1. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité ouverte pour cette norme.
3. Montrer que $\|.\|$ et $\|.\|_2$ sont des normes équivalentes telle que $\|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 1.2

Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'application

$$\|N_\lambda(x,y)\| = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2}$$

définie une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.3

Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

1. Montrer que $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty \text{ et } \|x\|_2\| \le \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

3 Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée

$$\overline{B}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \|(x,y)\| \leq 1\},$$

par chacune des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

Exercice 1.4

Soit l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$.

1 Montrer que pour tous vecteurs $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ on a l'inégalité

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|.$$

2 Déduire que si une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs $x_k \in \mathbb{R}^n$ converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ alors,

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k\| = \|\lim_{k\to+\infty} x_k\|.$$

3 Soient (x_k) et (y_k) deux suites vectorielles de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = l \in \mathbb{R}^n$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_k - y_k\| = 0$, on voit $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k = l$.

Exercice 1.5

Soit $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continue sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$, et soit l'application φ définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longrightarrow & \varphi(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2} f(x)dx. \end{array}$$

Montrer que φ est linéaire et continue.

1.1.1 Exercices supplémentaires

Exercice 1.6

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $x_n = \left(\dfrac{1}{1+n}, 1 + e^{-n}\right)$.

1 Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.

2 Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_1$.

Exercice 1.7

Soit $C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie et continue sur $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

1 Montrer que $\|f\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$, et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ sont des normes sur $C([0,1],\mathbb{R})$, $(\star)$.

2 On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_n(x) = \begin{cases} 1-(n+1)x & si\ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n+1} \\ 0 & si\ \dfrac{1}{n+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|_1$.

3 Vérifier que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.8

Soit N une application de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|tx+y|}{\sqrt{1+t^2}}$$

1 Montre N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2 En utilisant l'inéqualité de Cauchy-Schwarz montrer que $N \leq N_2$.

3 Soit (Δ) la droite d'equation : $tx+y=0$ et $M_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Donner la valeur de $d(M_0,\Delta)$, puis, en déduire l'équivalence de N et N_2, c'est à dire $N \approx N_2$.

1.2 Corrections d'exercices du série 1

Correction d'exercice 1.1

Soit $a,\ b \geq 0$. Posons $\forall u(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \|u\| = \sqrt{a^2x^2+b^2y^2}$..

1 Montrons que $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Alors, pour tous $(x,y),\ (x',y') \in \mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

a Séparation : $\|u(x,y)\| = 0 \Leftrightarrow a^2x^2+b^2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

b Homogénéité : $\|(\lambda x,\lambda y)\| = \sqrt{a^2\lambda^2x^2+b^2\lambda^2y^2} = |\lambda|\sqrt{a^2x^2+b^2y^2} = |\lambda|\|(x,y)\|$.

c Inégalité triangulaire : On utilisant ineqalité de Cauchy-Schwarz, on trouve,

$$\begin{aligned} \|(x+x',y+y')\|^2 &= a^2(x+x')^2+b^2(y+y')^2 \\ &= a^2x^2+b^2y^2+a^2x'^2+b^2y'^2+2(ax)(ax')+2(by)(by') \\ &\leq a^2x^2+b^2y^2+a^2x'^2+b^2y'^2 \\ &\qquad +2\sqrt{(a^2x^2+b^2y^2)(a^2x'^2+b^2y'^2)} \\ &\leq (\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}+\sqrt{a^2x'^2+b^2y'^2})^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne : $\|(x+x', y+y')\| \leq \sqrt{a^2x^2+b^2y^2} + \sqrt{a^2x'^2+b^2y'^2}$.

2 $\overline{B}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; a^2x^2+b^2y^2 \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \frac{x^2}{\frac{1}{a^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{b^2}} \leq 1\}$. La boule unité donc est l'intérieur de l'ellipse.

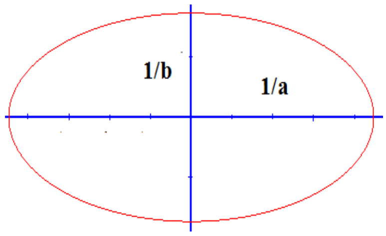


FIGURE 1.1 – Présentation de la boule unité fermée.

3 Il est facile de majorer et minorer la norme donnée, en effet, on a

$$\min(|a|,|b|)\|u(x,y)\| \leq \|u(x,y)\| \leq \max(|a|,|b|)\|u(x,y)\|.$$

Ce qui sinifier que $\|.\|_2 \approx \|.\|$.

Correction d'exercice 1.2

Pour vérifier la condition de séparation on doit voir :

$$x^2+2\lambda xy+y^2 > 0 \Leftrightarrow \Delta' = \lambda^2-1 < 0 \Leftrightarrow \lambda \in]-1,1[.$$

Correction d'exercice 1.3

Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|, \quad \|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \|u\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

1 On montre que $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(a) Les propriétés de séparation et d'homogénéité sont faciles à vérifier.

(b) Pour montrer l'inégalité triangulaire, on considère deux points $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^2$.
Si $x+y=0$ alors le résultat est clair.

Si $x+y\neq 0$. d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{i=n}(x_i+y_i)^2\\
&= \sum_{i=1}^{i=n}x_i(x_i+y_i)+\sum_{i=1}^{i=n}y_i(x_i+y_i)\\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{i=n}(x_i+y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_{i=1}^{i=n}y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{i=n}(x_i+y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq (\|x\|_2+\|y\|_2)(\|x+y\|_2).
\end{aligned}$$

Comme $\|x+y\|_2\neq 0$, en divisant par $\|x+y\|_2$, on obtient donc linégalité triangulaire.

2 Montrons que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$:

$$\|u\|_\infty\leq\|u\|_2\leq\|u\|_1\leq n\|u\|_\infty \text{ et } \|u\|_2\|\leq\sqrt{n}\|u\|_\infty.$$

a Pour tout $1\leq i\leq n$ n on a les inégalités

$$|x_i|\leq\max\{|x_1|,...,|x_n|\}=\|x\|_\infty. \tag{1.1}$$

Par sommation membre à membre dans (1.1), on trouve,

$$|x_1|+...+|x_n|=\|x\|_1\leq n\|x\|_\infty.$$

b Si on prend autre fois la somme des carrés des inégalités (1.1), on obtient

$$x_1^2+...+x_n^2=\|x\|_2^2\leq n\|x\|_\infty^2.$$

Par conséquent,

$$\|x\|_2\leq\sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

c On sait que,

$$x_1^2+...+x_n^2\leq(x_1^2+...+x_n)^2,$$

Donc, on aura :

$$\|x\|_2^2\leq\|x\|_1^2,$$

D'où,

$$\|x\|_2\leq\|x\|_1.$$

d Comme pour tout $1\leq i\leq n$ on voit que :

$$|x_i|\leq\sqrt{x_1^2+...+x_n}=\|x\|_2,$$

Passons donc au maximum on trouve,

$$\max\{|x_1|,...,|x_n|\}=\|x\|_\infty\leq\|x\|_2.$$

3 **a** La boule $\overline{B}_1(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|+|y|\leq 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$ est un losange par rapport à $\|x\|_1$. (Voir le figure au dessous)

- **b** La boule $\overline{B}_2(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$ est un disque centré dans $(0,0)$ et de rayon 1 par rapport à $\|x\|_2$,
- **c** La boule $\overline{B}_3(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \max\{|x|+|y|\} \leq 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$ est un carré par rapport à $\|x\|_\infty$.

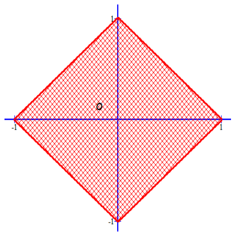


FIGURE 1.2 – $\overline{B}_1(0,1)$.

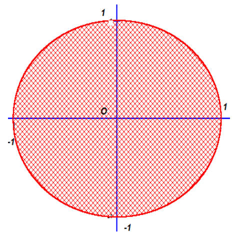


FIGURE 1.3 – $\overline{B}_2(0,1)$.

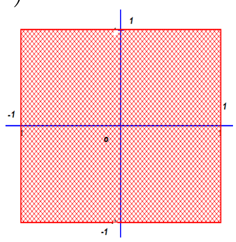


FIGURE 1.4 – $\overline{B}_3(0,1)$.

Correction d'exercice 1.4

1 Montrons que pour tous vecteurs $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ on a l'inégalité

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x-y\|.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on voit que

$$\begin{array}{rcl} \|x\| & = & \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \\ \|y\| & = & \|(y-x)+x\| \leq \|y-x\| + \|x\|. \end{array}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{array}{rcl} \|x\| - \|y\| & \leq & \|x-y\| \\ \|y\| - \|x\| & \leq & \|y-x\|. \end{array}$$

Donc, on aura

$$-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|,$$

D'où le résultat,

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x-y\|.$$

2 En on déduit que l'application $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (la norme) est continue. Ce qui donne, si une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs $x_k \in \mathbb{R}^n$ converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ alors,

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k\| = \|\lim_{k\to+\infty} x_k\|.$$

3 2^{iem} Méthode : Supposons que $x_k \to l$ quand $k \to +\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N} : \ k \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - l\| \leq \varepsilon,$$

Ainsi, d'après la question 1 on a pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq k_0$, on obtient

$$\Big| \|x_k\| - \|l\| \Big| \leq \|x_k - l\| \leq \varepsilon.$$

C'est à dire,

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_k\| = \|l\| = \|\lim_{k \to +\infty} x_k\|.$$

4 Supposons que $\lim_{k \to +\infty} x_k = l \in \mathbb{R}^n$ et $\lim_{k \to +\infty} \|x_k - y_k\| = 0$. Alors, d'après l'inégalité triangulaire

$$\|y_k - l\| \leq \|y_k - x_k\| + \|x_k - l\|.$$

Par passage à la limite, on trouve,

$$\lim_{k \to +\infty} \|y_k - l\| \leq \lim_{k \to +\infty} \|y_k - x_k\| + \lim_{k \to +\infty} \|x_k - l\| = 0.$$

D'où $\lim_{k \to +\infty} y_k = l$.

1.2.1 Corrections d'exercices supplémentaires

Remarque 1.2

Comme on le sait, tous les normes sont équivalents dans l'espace de dimension finie. Cet exemple explique non équivalence des normes, bien qu'elle soit définie dans un espace de dimension infinie.

Remarque 1.3

Rappelons que deux normes $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$ sur un espace véctoriel E ne sont pas équivalentes, s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} = 0, \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} = +\infty.$$

Correction d'exercice 1.5

1 Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f+\mu g) &= \int_{-1}^{1}\frac{x}{1+x^2}[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx\\ &= \lambda\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+x^2}f(x)dx+\mu\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+x^2}g(x)dx\\ &= \lambda\varphi(f)+\mu\varphi(g).\end{aligned}$$

Donc, φ est linéaire.

2 φ est continue si et seulement si

$$\exists C>0,\ \forall f\in E : |\varphi(f)|\leq C\|f\|_\infty.$$

3 Soit $f \in E$, alors, on a :

$$\begin{aligned}|\varphi(f)| &= \left|\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+x^2}f(x)dx\right|\\ &\leq \|f\|_\infty\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+x^2}dx\\ &= \|f\|_\infty\int_{0}^{1}\frac{2x}{1+x^2}dx=\ln 2\|f\|_\infty. \qquad (1.2)\end{aligned}$$

On prend $C = \ln 2$ pour que φ soit continue.

Correction d'exercice 1.6

Soit la suite $x_n = \left(\frac{1}{1+n}, 1+e^{-n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. On remarque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge semplement vers la limite $(0,1)$, car,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+n}=0,\ \text{et}\ \lim_{n\to+\infty}(1+e^{-n})=1.$$

Alors, on voit que :

1 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (ou par la norme $\|.\|_\infty$) ssi

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0,\ \forall n\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\Rightarrow\|x_n-(0,1)\|_\infty<\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $(n \geq n_0)$. on obtient, donc,

$$\|x_n-(0,1)\|_\infty=\left\|\left(\frac{1}{1+n},e^{-n}\right)\right\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{1}{1+n},e^{-n}\right\}\leq\frac{1}{1+n}<\varepsilon.$$

Cela implique que $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Alors, il suffit de choisir $n_0 = \max\left\{0, [\frac{1}{\varepsilon}-1]+1\right\}$.

2 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par la norme $\|.\|_1$ ssi

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0,\ \forall n\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\Rightarrow\|x_n-(0,1)\|_1<\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $(n \geq n_0)$. on a, donc,

$$\|x_n - (0,1)\|_1 = \left\|\left(\frac{1}{1+n}, e^{-n}\right)\right\|_1 = \left|\frac{1}{1+n}\right| + \left|e^{-n}\right| \leq \frac{2}{1+n} < \varepsilon.$$

Par conséquent $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Alors, il suffit de prendre $n_0 = \max\left\{0, [\frac{2}{\varepsilon} - 1] + 1\right\}$.

Correction d'exercice 1.7

Soit $C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie et continue sur $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

1. Reste comme exercice.
2. On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$.
3. $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|_1$ ne sont pas équivalentes, car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty.$$

Correction d'exercice 1.8

Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application définie par $N(x,y) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|tx+y|}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Montrons que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Soient (x,y), $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

   a. Séparation :

$$N(x,y) = 0 \Leftrightarrow |tx+y| = 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow x = y = 0.$$

   Réciproquement si $x = y = 0 \Rightarrow N(x,y) = 0$.

   b. Homogénéité : $N(\lambda x, \lambda y) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|t\lambda x + \lambda y|}{\sqrt{1+t^2}} = |\lambda| N(x,y)$.

   c.

$$\begin{aligned} N(x+x', y+y') &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|t(x+x') + (y+y')|}{\sqrt{1+t^2}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|(tx+y) + (tx'+y')|}{\sqrt{1+t^2}} \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|tx+y|}{\sqrt{1+t^2}} + \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|tx'+y'|}{\sqrt{1+t^2}} = N(x,y) + N(x',y'). \end{aligned}$$

2. En utilisant l'inéqualité de Cauchy-Schwarz, on voit donc,

$$|tx+y| = |\langle (t,1), (x,y)\rangle| \leq \sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+y^2},$$

   ce qui donne $N \leq \|.\|_2$.

3. a. 1^{ire} Méthode : On a

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|tx_0 + y_0|}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Soit A la projection orthogonale du point M_0 sur la droite (Δ). Alors, on a

$$d(A, \Delta) = \frac{|tx_0 + y_0|}{\sqrt{1+t^2}} = d(M_0, \Delta).$$

Comme la droite (Δ) passe par l'origine, cette distance $d(A, \Delta)$ sera maximale lorsque A se confondra avec l'origine. On voit donc

$$d(O, M_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|tx_0 + y_0|}{\sqrt{1+t^2}}.$$

D'où l'équivalence de deux normes N et N_2.

b 2^{ime} Méthode : Soit la fonction $f(t) = \dfrac{(tx+y)^2}{1+t^2}$, alors, on sait que

$$f'(t) = \frac{2(tx+y)(x-ty)}{(1+t^2)^2}.$$

Donc, la fonction f admet un maximum pour $t = \dfrac{x}{y}$, sa valeur est

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = x^2 + y^2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{(tx+y)^2}{1+t^2}.$$

Donc, $N \approx N_2$.

Chapitre 2

Limites et Continuité

2.1 Exercices du série 2

Exercice 2.1

Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données si possible.

1. $f_1(x, y) = \ln(x + y - 1).(\star)$
2. $f_2(x, y) = \sqrt{1 - xy}$.
3. $f_3(x, y) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.
4. $f_4(x, y, z) = \dfrac{1 + x^2}{xyz}$.
5. $f_5(x, y) = \dfrac{\ln y}{\sqrt{x - y}}$.
6. $f_6(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - y}}{\sqrt{y}}.(\star)$

Exercice 2.2

Dans chaque cas, déterminez les courbes de niveau des fonctions de deux variables données.

1. $f(x, y) = x + y - 1$
2. $f(x, y) = e^{y-x^2}$.
3. $f(x, y) = y - \cos x.(\star)$
4. $f(x, y) = \ln(x - y^2)$.

Exercice 2.3

Calculer la limite si elle existe dans les cas suivants :

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$.
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x - y}$.
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x - 1)^2 + y^2}$.
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{y}\right)$.
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}$.
8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y - 3}{x + y + 1}$, $(\star)$.
9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{e^x - 1}$.

Exercice 2.4

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ sauf les points de la première bissectrice $(y = x)$, telle que : $f(x, y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$. Montrer que, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} \frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos \alpha$.

2 Calculer la limite suivante $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

3 Calculer la limite suivante $\lim\limits_{\|(x,y)\|_2\to+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(2xy)$.

Exercice 2.5

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$.

Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ de trois manières différentes :

1 Par majoration.

2 En utilisant les coordonnées polaires.

3 Selon la définition.

Exercice 2.6

Soit les deux fonctions f, g suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

2 $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Exercice 2.7

Étudier si les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité au point a

1 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, $a(0,0)$.

2 $f(x,y)=\dfrac{x-2}{(x-2)^2+y^2}$, $a(2,0)$.

3 $f(x,y)=\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, $a(0,0)$ $(\star)$.

2.1.1 Exercices supplémentaires

Exercice 2.8

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1, & si\ x^2+y^2 > 1, \\ -\frac{1}{2}x^2, & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.9

Montrer que les ensembes suivents sont compacts

1. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 9, \right\}$.
2. $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1\right\}$.

2.2 Corrections d'exercices du série 2

Remarque 2.1

1. Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ (finie), en $A(x_0,y_0)$, alors la restriction de f à tout courbe continue passant par A a la même limite.
2. Pour montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ n'existe pas en $A(x_0,y_0)$, il suffit de chercher deux restrictions aux des courbes continues passant par A qui conduisent à des limites différentes.
3. Voici quelques courbes continues passant par $A(x_0,y_0)$.
   a. Les droites :
   $$\begin{array}{rcl} x &=& x_0, \quad \text{la droite verticale} \\ y &=& m(x-x_0)+y_0, \quad m \in \mathbb{R}. \end{array}$$
   b. Les paraboles
   $$\begin{array}{rcl} y &=& m(x-x_0)^2+y_0, \quad m \in \mathbb{R}, \\ x &=& m(y-y_0)+x_0, \quad m \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Correction d'exercice 2.1

On détermine le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. Si $f_1(x,y) = \ln(x+y-1)$. Alors, on a : $\mathcal{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > 1-x\right\}$. Voir, au dessous le présentation de $\mathcal{D}_i$, où $i \in \{1, ..., 5\}$.

2 Pour $f_2(x,y)=\sqrt{1-xy}$. On a, donc,

$$\mathcal{D}_2=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ xy\leq 1\Big\}=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\leq\frac{1}{x},\ x\neq 0\Big\}.$$

3 Dans le cas, $f_3(x,y)=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$. on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3 &= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 4,\ \text{et } x^2+y^2>1\Big\}\\ &= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1<x^2+y^2\leq 4\Big\}.\end{aligned}$$

4 $f_4(x,y)=\dfrac{\ln y}{\sqrt{x-y}}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_4 &= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y>0,\ \text{et } x-y>0\Big\}\\ &= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<x\Big\}.\end{aligned}$$

5 $f_5(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2-y}}{\sqrt{y}}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_5 &= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\leq x^2,\ \text{et } y>0\Big\}\\ &= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y\leq x^2\Big\}.\end{aligned}$$

6 $f_6(x,y,z)=\dfrac{1+x^2}{xyz}$.

$$\mathcal{D}_6=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\neq 0,\ y\neq 0 \text{ et } z\neq 0\Big\}=\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}.$$

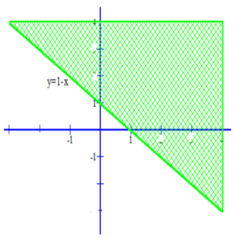


FIGURE 2.1 – $\mathcal{D}_1$.

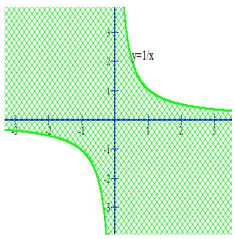


FIGURE 2.2 – $\mathcal{D}_2$.

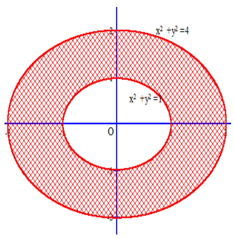


FIGURE 2.3 – $\mathcal{D}_3$.

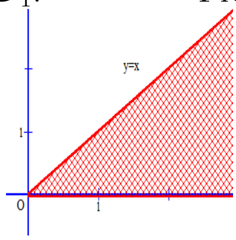


FIGURE 2.4 – $\mathcal{D}_4$.

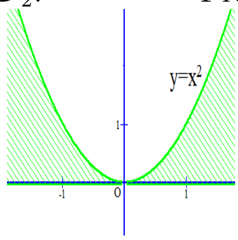


FIGURE 2.5 – $\mathcal{D}_5$.

Correction d'exercice 2.3

On calcule les limites (si elles existent) dans les cas suivants :

1 On utilisant une majoration, et comme, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $xy \leq 2xy \leq x^2+y^2$. Alors,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{y\to 0} |y| = 0$$

2 On utilisant la restriction de f sur la courbe continue $x=1$ qu'elle passe par $A(1,1)$.
$\lim\limits_{y\to 1^+} \frac{1}{1-y} = -\infty$, et $\lim\limits_{y\to 1^-} \frac{1}{1-y} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$ n'existe pas.

3 En passant aux coordonnées polaires,

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \end{cases} \quad \text{où } r>0,\ \theta\in[0,2\pi].$$

Alors, on obtient,

$$f(1+r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r\sin^3\theta.$$

Comme, on a

$$|f(1+r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq |r\sin^3\theta| \leq r \underset{r\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = 0.$

4 La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas car, pour $y = mx$, $m\in\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Donc, la limite est dépend de m.

5

$$\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{y}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{1}{y} \times \frac{\sin(\frac{x}{y})}{\frac{x}{y}} = \frac{1}{\pi}.$$

Car,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha - 1}{\alpha} = 1.$$

6 En utilisant les coordonnées polaires, posons

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \end{cases} \quad \text{où } r>0,\ \theta\in[0,2\pi].$$

Alors, on trouve,

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin\theta\cos\theta.$$

Par suite, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{r\to 0}(r\sin\theta\cos\theta) = 0.$

7

8 Par les coordonnées polaires,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \quad \text{où } r>0,\ \theta\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

Alors, on voit que,

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}.$$

Par suite, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}$.
la limite dépend de θ alors elle n'existe pas.

9 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y-3}{x+y+1} = -3.$

10 Posons, $\alpha = xy$, donc, $\begin{cases} \alpha \longrightarrow 0 \\ \text{si } (x,y) \longrightarrow (0,0). \end{cases}$ Par conséquent, on aura

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{e^x-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\frac{e^{xy}-1}{xy}}{x\frac{e^x-1}{x}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0.$$

Car,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{e^\alpha-1}{\alpha} = 1.$$

Correction d'exercice 2.4

1 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(x,x) : x\in\mathbb{R}\}$ par $f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}$.
Alors, En utilisant les formules trigonométriques, on obtient :

$$\frac{\sin x - \sin y}{x-y} = \frac{\sin(\frac{x-y}{2})}{\frac{x-y}{2}} \times \cos(\frac{x-y}{2}) = \cos\alpha.$$

Sachant que $\lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} \frac{\sin(\frac{x-y}{2})}{\frac{x-y}{2}} = 1$, on a, donc,

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} f(x,y) = \cos\alpha.$$

2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{x}+\sqrt{y}) =$
0

3 On a $|\sin(2xy)| \leq 2xy$. Alors, posns :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \quad \text{où } r>0,\ \theta\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

Donc, on voit que,

$$|e^{-(x^2+y^2)}\sin(2xy)| \leq 2e^{-(x^2+y^2)}|x||y| = 2e^{-r}r^2|\sin\theta\cos\theta|.$$

D'où,

$$0 \leq \lim_{r\to+\infty} 2e^{-r}r^2|\sin\theta\cos\theta| \leq 2r^2e^{-r} \underset{r\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Correction d'exercice 2.5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par : $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$.
Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

1 1^{ire} Méthode : Par majoration. On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} : \ 2|xy| \leq x^2+y^2.$$

Alors, par conséquent, on trouve,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} : \ 2|xy^2| \leq |y|(x^2+y^2).$$

Donc, en résulte que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{y\to 0}|y| = 0$$

2 2^{ime} Méthode : En utilisant les coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \quad \text{où } r>0, \ \theta\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

Alors, on voit que,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} 2r\sin^2\theta\cos\theta = 0.$$

3 3^{ime} Méthode : Il faut montrer que

$$\forall\varepsilon>0, \ \exists\delta(\varepsilon) \ \|(x,y)-(0,0)\|_2 \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Sachant que $x^2+y^2 > y^2$, alors, an trouve

$$\left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right| < \left|\frac{2xy^2}{x^2}\right| = 2|x| < 2\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon.$$

Il suffit de prendre $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Correction d'exercice 2.6

On étudiant la continuité des fonctions f, g sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

1 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

On a sait que f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ car elle est quotient de deux fonctions continues, $(x,y) \longmapsto xy$, (polynême), et $(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$, (racine carrée) de polynême). Donc, il reste de prouver la continuité en point $(0,0)$. En utilisant les coordonnées polaires, posons, donc

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \quad \text{où } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Alors, on trouve,

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin\theta\cos\theta.$$

Par suite, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{r\to 0}(r\sin\theta\cos\theta) = 0.$

2 $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La continuité de g sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est claire.
La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,0)$ n'existe pas, en effit, si $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, on trouve,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+m)x}{\sqrt{1+m^2}|x|} = \pm\dfrac{1+m}{\sqrt{1+m^2}}$. Cela signifié que la limite n'existe pas. D'où g est continue seulement sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Correction d'exercice 2.7

On étude la prolongement par continuité au point A du fonctions suivantes :

1 $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, $A(0,0)$. On étudie la continuité en $(0,0)$. En passant aux coordonnées polaires. $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \quad \text{où } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[, \end{cases}$ on obtient,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{r\to 0} |\frac{r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^2}| \leq \lim_{r\to 0} r^2 = 0.$$

Par coséquent $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Cela prouve que f est continue en $(0,0)$. Donc elle est prolongeable par continuité en $(0,0)$ par $\tilde{f}$ telle que :

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On remarque que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Car la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

2 Pour la fonction f qui définit par $f(x,y) = \dfrac{x-2}{(x-2)^2+y^2} + 1$, $A(2,0)$. Posons, $\begin{cases} x = r\cos\theta + 2, \\ x = r\sin\theta, \qquad \text{où } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[, \end{cases}$ on aura donc,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{r\to 0} \frac{|\cos\theta|}{r} = +\infty.$$

Ce qui est signifier que f n'est pas prolongeable par continuité en $A(2,0)$.

3 $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, $A(0,0)$. $(\star)$. Reste comme exercice.

2.2.1 Corrections d'exercices supplémentaires

Correction d'exercice 2.8

Montrons la continité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ telle que : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1, & si\ x^2+y^2 > 1, \\ -\frac{1}{2}x^2, & \text{si non.} \end{cases}$

Soient D l'extérieur du disque unité et E son intérieur, c'est à dire

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}, \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}.$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors, on distinguer deux cas possibles.

1 Si le point (x_0, y_0) dans D ou E, alors f est continue, car elle est polynôme.

2 Dans le cas où le point (x_0, y_0) aux bord de D (ou E), c'est à dire $x_0^2 + y_0^2 = 1$, donc, on trouve

a Lorsque $(x,y) \in D$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1) = -\frac{1}{2}x_0^2 = f(x_0,y_0).$$

b Lorsque $(x,y) \in E$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (-\frac{1}{2}x^2) = -\frac{1}{2}x_0^2 = f(x_0,y_0).$$

D'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Correction d'exercice 2.9

Montrer que les ensembles suivents sont compacts. Premièrement, rappelons que, une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

1 $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 9, \right\}$. Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + y^2. \end{array}$$

Alors, f est continue, car elle est un polynôme, comme, on a

$$A = f^{-1}([0, 9]),$$

et l'ensemble $[0, 9]$ est fermé dans $(\mathbb{R}, |.|)$, alors, A est aussi fermé dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$. On a aussi $A \subseteq \overline{B}((0, 0), 6)$, c'est à dire A est borné. D'où la compacité de A.

2 $B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1\right\}$. De même manière qui est ce précède, on peut définir l'application f par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2. \end{array}$$

Alors, on a :

(a) $B = f^{-1}(\{1\})$, f est continue (un polynôme), et $\{1\}$ est fermé. Donc B est le aussi.

(b) La bornitude de B, car $B \subseteq \overline{B}((0, 0, 0), 6)$. D'où la compacité de B.

Chapitre 3

Dérivabilité et Différentiabilité

3.1 Exercices du série 3

Exercice 3.1

Dans chaque cas, calculer toutes les dérivées partielles premières des fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 4y^5$
2. $f(x,y) = y\cos(e^{xy+3y})$.
3. $f(x,y,z) = x\sin(yz) - \ln(3 - e^{x+y})$.

Exercice 3.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2(\star)$.
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en tout point.
4. Que peut-on déduire du calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$?

Exercice 3.3

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Est ce que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3.4

Vérifier, en utilisant la définition, que les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont différentiables dans le point indiqué :

1 $f(x, y) = xy - 3x^2$, en $(1, 2)$.

2 $f(x, y) = xy - 2y^2$, en $(-2, 3)$. $(\star)$

3 $f(x, y) = y\sqrt{x}$, en $(4, 1)$, $(\star)$.

Exercice 3.5

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1 Calculer les dérivées partielles en point $(0, 0)$.

2 Calculer les dérivées partielles premières en $(0, 0)$.

3 Étudier la continuité des dérivées partielles premières en $(0, 0)$.

4 Est ce que f est différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 3.6

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.
Vérifier que f est différentiable et donner sa différentialle.

Exercice 3.7

1 Calculer la dérivée directionnelle de la fonction : $f(x, y) = 3x^2y - 4xy$, au point $(1, 2)$, le long la direction $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

2 Vérifier l'equalité $D_v f(1, 2) = \nabla f(1, 2).v = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2).v_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2).v_2$.

Exercice 3.8

Sachant que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable et que

$$f(2, 5) = 6,\ \partial_x f(2, 5) = 1,\ \text{et}\ \ \partial_y f(2, 5) = -1$$

donner une valeur approchée de $f(2.2, 4.9)$.

Exercice 3.9

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, telles que

$$f(u,v) = u + v, \text{ où } u(x,y) = e^{x+y} \text{ et } v(x,y) = x^2 + y^2.$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre un de la fonction f.

Exercice 3.10

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, telles que

$$f(u,v) = u + v, \text{ où } u(x,y) = e^{x+y} \text{ et } v(x,y) = x^2 + y^2.$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre un de la fonction f.

Exercice 3.11

Donner le développement limité de d'ordre 2 en $(0,0)$ des fonctions suivantes

1. $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$.
2. $f(x,y) = \dfrac{e^x}{2+y}$.
3. $f(x,y) = e^{\cos(x+y)}$, $(\star)$.
4. $f(x,y) = e^y \cos x$, $(\star)$.

Exercice 3.12

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Démontrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.
2. Démontrer que la fonction f admet une dérivée selon tout vecteur non nul $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ au point $(0,0)$.

3.1.1 Exercices supplémentaires

Exercice 3.13

Soit la fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. (a) $F(x,y) = f(y,x)$ (b) $F(x) = f(x,x)$

2 Vérifier vos résultats sur l'exemple $f(x,y) = x^3 + xy^2$.

Exercice 3.14

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$. Calculer la dérivée directionnelle au point $(1,1,1)$ selon la direction des vecteurs suivantes

1 $\overrightarrow{v} = (2,1,3)$ **2** $\overrightarrow{v} = (1,-1,1)$.

Exercice 3.15

On considère la courbe plane d'équation

$$xe^y + e^x \sin(2y) = 0. \tag{3.1}$$

1 Vérifier que l'équation (3.1) définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.

2 Calculer $\varphi(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(0, \varphi(0))$.

3 En déduire la limite de $\dfrac{y}{x}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ en étant sur la courbe.

Exercice 3.16

On considère la courbe plane d'équation

$$2x^3y + 2x^2 + y^2 = 0. \tag{3.2}$$

1 Vérifier que l'équation (3.2) définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1,1)$.

2 Calculer $\varphi(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(1, \varphi(1))$.

3 Calculer le développement de Taylor de φ à l'ordre 1 centré en 1.

Exercice 3.17

Trouvons le développement limité au voisinage de $(0,0)$ à l'ordre 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{2+x+y}{1+x-y}.$$

3.2 Corrections d'exercices du série 3

Correction d'exercice 3.1

Calculons les dérivées partielles premières des fonctions suivantes.

1 Si $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 4y^5$. Alors, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3y^2, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 20y^4.$$

2 Pour $f(x,y) = y\cos(e^{xy+3y})$. On trouve, donc,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y^2\sin(e^{xy+3y}), \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(e^{xy+3y}) - y(x+3)\sin(e^{xy+3y}).$$

3 Les dérivées partielles premièresles de $f(x,y,z) = x\sin(yz) - \ln(3 - e^{x+y})$ sont : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(yz) - \frac{-e^{x+y}}{3 - e^{x+y}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xz\cos(yz) - \frac{-e^{x+y}}{3 - e^{x+y}}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = xy\cos(yz)$.

Correction d'exercice 3.2

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1 On étudiant la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Car les fonctions $(x,y) \longmapsto xy$, $(x,y) \longmapsto x^2+y^2$ et $(x,y) \longmapsto x^2 - y^2$ (des polynêmes). Donc, il reste de prouver la continuité en point $(0,0)$.
En utilisant les coordonnées polaires, posons, donc

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, & \text{où } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

Alors, on trouve,

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2 \sin\theta\cos\theta\cos 2\theta.$$

Par suite, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}\right| = \lim\limits_{r\to 0} |(r^2\sin\theta\cos\theta)\cos 2\theta| \leq \lim\limits_{r\to 0} r^2 = 0.$
Donc,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

D'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2 On calcule $\nabla f(x,y)$.

(a) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{yx^4 - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{xy^4 - x^5 + 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

.

(b) Pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 D'après ce qui précède on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy^3(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 1 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = -1 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4 Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ le théorème de Schwarz permet de conclure que les dérivées secondes croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ ne sont pas continue en $(0,0)$.

Correction d'exercice 3.3

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Car quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est aussi continue en $(0,0)$, en effet, on utilisant les coordonnées polaires, on trouve :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{r\to 0} |r^2 \sin^2\theta \cos^2\theta| \leq \lim_{r\to 0} r^2 = 0 = f(0,0).$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 On calcule $\nabla f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3 On calcule $\nabla f(x,y)$.

(a) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

.

(b) Pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. C'est à dire,

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{j}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\vec{j}, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}(y^3\vec{i} + x^3\vec{j}), & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\vec{i} + 0\vec{i} = \vec{0}, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$?
En utilisant l'inégalité : $2|xy| \leq x^2+y^2$, , on peut faire les majorations suivantes :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \frac{|y^3|}{(x^2+y^2)^2} = \frac{|y||y^2|}{(x^2+y^2)^2} \leq |y|.$$

Par passage à la limite on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue en $(0,0)$.
Sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. C'est à dire $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
De manière analogue, on démontre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et par conséquent
$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

5 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, donc, elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Correction d'exercice 3.4

En utilisant la définition, pour calculons la différentiable de f dans le point indiqué.
Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

1 Pour $f(x,y) = xy - 3x^2$, en $(1,2)$, on a $f(1,2) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - 6x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -4$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1$. Donc,

$$\frac{f(x,y) - f(2,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x-1) - (y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 1 + r\cos\theta,\ y = 2 + r\sin\theta$, ce rapport se réécrit

$$\frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x-1) - (y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = r\cos\theta(\sin\theta - 3\cos\theta).$$

On a alors,

$$\left|\frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x-1) - (y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}\right| \leq 4r \underset{r\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left| \frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x-1) - (y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} \right| = 0.$$

La fonction f est donc différentiable en $(1,2)$. Donc, en résulte que

$$df(1,2) = -4(x-1) + (y-2) = -4x + y + 2.$$

2 Si $f(x,y) = xy - 2y^2$, $(2,1)$, on a $f(2,1) = -1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - 6y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -4$. Donc,

$$\frac{f(x,y) - f(2,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) - \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}} = \frac{xy - 3y^2 + 1 - (x-2) + 4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 4 + r\cos\theta$, $y = 1 + r\sin\theta$, ce rapport se réécrit

$$\frac{xy - 3y^2 + 1 - (x-2) + 4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}} = rsin\theta(\cos\theta - 3\sin\theta).$$

Par suite,

$$\left| \frac{xy - 3y^2 + 1 - (x-2) + 4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}} \right| \leq 4r \underset{r\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 .$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left| \frac{xy - 3y^2 + 1 - (x-2) + 4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}} \right| = 0.$$

Par coséquent f est différentiable en $(2,1)$ et on a donc,

$$df(2,1) = (x-2) - 4(y-2) = x - 4y + 6.$$

3 $f(x,y) = y\sqrt{x}$, en $(4,1)$.

$$\begin{cases} f(x,y) = y\sqrt{x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(4,1) = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(4,1) = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(4,1) = 2 \end{cases}$$

On vu que, donc,

$$\frac{f(x,y) - f(4,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(4,1)(x-4) - \frac{\partial f}{\partial y}(4,1)(y-1)}{\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}} = \frac{y\sqrt{x} - 2 - \frac{1}{4}(x-4) - 2(y-1)}{\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 4 + r\cos\theta,\ y = 1 + r\sin\theta$, ce rapport se réécrit

$$\begin{aligned}
\frac{y\sqrt{x} - 2 - \frac{1}{4}(x-4) - 2(y-1)}{\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}} &= \frac{(1 + r\sin\theta)\sqrt{4 + r\cos\theta} - 2 - \frac{r\cos\theta}{4} - 2r\sin\theta}{r} \\
&= \frac{2(1 + r\sin\theta)\sqrt{1 + \frac{r\cos\theta}{4}} - 2 - \frac{r\cos\theta}{4} - 2r\sin\theta}{r} \\
&= \frac{2(1 + r\sin\theta)(1 + \frac{r\cos\theta}{8} + o(r)) - 2 - \frac{r\cos\theta}{4} - 2r\sin\theta}{r} \\
&= \frac{r}{4}\sin\theta\cos\theta + \frac{o(r)}{r} \underset{r\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0\ .
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'approximation $\sqrt{1+t} \simeq 1 + \frac{t}{2} + o(t)$, lorsque $t \simeq 0$. On obtient, donc,

$$\lim_{(x,y)\to(4,1)} \frac{f(x,y) - f(4,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(4,1)(x-4) - \frac{\partial f}{\partial y}(4,1)(y-1)}{\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}} = 0.$$

Par coséquent f est différentiable en $(4,1)$ et on a donc,

$$df(4,1) = \frac{1}{4}(x-4) + 2(y-1) = \frac{1}{4}x + 2y - 3.$$

Correction d'exercice 3.5

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1 Calculer les dérivées partielles en point $(0,0)$.

2 Calculer les dérivées partielles premières en $(0,0)$.

3 Étudier la continuité des dérivées partielles premières en $(0,0)$.

4 Est ce que f est différentiable en $(0,0)$?

Correction d'exercice 3.6

La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, est dans $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, car elle est polynômiale, et sa différentielle donner par.

$$df = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz.$$

Correction d'exercice 3.7

1 On calcule la dérivée directionnelle de la fonction : $f(x,y) = 3x^2y - 4xy$, au point $(1,2)$, le long la direction $\overrightarrow{v} = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\Big)$.
D'après la définition on a :

$$D_v f(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+\sqrt{3}2t, 2-\frac{1}{2}t) - f(1,2)}{t} = \lim_{t\to 0}(-\frac{9}{8}t^2 + \frac{9-\sqrt{3}}{2}t + \frac{1+4\sqrt{3}}{2}) = \frac{1+4\sqrt{3}}{2}$$

2 Le gradient de f est le vecteur

$$\nabla f(x,y) = \Big(6xy - 4y, 3x^2 - 4x\Big).$$

Le gradient de f au point $(1,2)$ est :

$$\nabla f(1,2) = \Big(4, -1\Big).$$

Finalement, on trouve

$$\nabla f(1,2).v = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2).v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2).v_2 = 4\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{1}{2}) = D_v f(1,2).$$

Correction d'exercice 3.8

Nous donnons une valeur approchée de $f(2.2, 4.9)$. Sachant que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable et que

$$f(2,5) = 6,\ \partial_x f(2,5) = 1,\ \text{et}\ \ \partial_y f(2,5) = -1$$

Soit $L_{(2,5)}(x,y) = 0$ l'équation du plan tangent à f au point $(2,5)$. Alors, on a approche

$$f(2.2, 4.9) \simeq L_{(2,5)}(2.2, 4.9),$$

et comme,

$$L_{(2,5)}(x,y) = f(2,5) + (x-2)\frac{\partial f}{\partial x}(2,5) + (y-5)\frac{\partial f}{\partial y}(2,5) = x - y + 9.$$

Donc, on vu que $f(2.2, 4.9) \simeq 6.3$.

Correction d'exercice 3.9

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, telles que

$$f(u,v) = u + v,\ \text{où}\ u(x,y) = e^{x+y}\ \text{et}\ v(x,y) = x^2 + y^2.$$

On calcule les dérivées partielles d'ordre un de la fonction f.

1^{ire} Méthode : On utilise la formule de la dérivée partielle d'une fonction composée suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ et \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Alors, on obtient, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} + 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} + 2y$.

2^{ime} Méthode : Posons $F = f \circ g$. On a donc,

$$\begin{array}{cccl} F : \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 & - - \overset{f}{-} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (u(x, y), v(x, y)) & \longmapsto f(u, v). \end{array}$$

La matrice Jacobinne de la première application g est la suivante :

$$J_g = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobinne associée à f est la suivante :

$$J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u}, & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui signifie que

$$J_F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & , \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x}.\dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial x}, & \dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y} + 2x, & e^{x+y} + 2y \end{pmatrix}$$

Correction d'exercice 3.10

On donne le développement limité de d'ordre 2 en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

1 On utilise les les dévellopements limités usuelles au voisinage de 0 suivantes

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2),\ \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2),\ \text{et } e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2).$$

Donc, a au voisinage de 0 on vu que :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2).$$

Donc, le dévellopement limité de f de d'ordre 2 en $(0,0)$ est donner par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\cos x}{\cos y} = \left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)\right) \\ &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+o(x^2+y^2). \end{aligned}$$

2 On a au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+y} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{y}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}y^2+o(x^2+y^2)\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{e^x}{2+y} = \frac{1}{2}\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}y^2+o(y^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}y^2-\frac{1}{4}xy+o(x^2+y^2). \end{aligned}$$

3 Si x, y au voisinage de 0, alors, $x+y$ aussi au voisinage de 0, et on a

$$\cos(x+y) = 1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+o(x^2+y^2).$$

D'où,

$$\begin{aligned} e^{\cos(x+y)} &= e\times\left(e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)}\right) \\ &= e\times\left(1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)\right). \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} e^y\cos x &= \left(1+y+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)\right)\times\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) \\ &= 1+y-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+o(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Correction d'exercice 3.11

1 On souhaite démontrer que

$$f(x,y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4} \underset{\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\to 0}{\longrightarrow} f(0,0)=0.$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Comme $(y-x^2)^2+x^4\geq 0$ et $(y-x^2)^2+x^4\geq 0$.

Donc,

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x,y)| &= \left|\frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4}\right| = \left|\frac{|x||x|^4}{(y-x^2)^2+x^4}\right| \\ &\leq \left|\frac{|x||x|^4}{x^4}\right| = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|. \end{aligned}$$

Ainsi, par Théorème d'encadrement

$$f(x,y) \underset{\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\to 0}{\longrightarrow} f(0,0) = 0.$$

2 Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Donc au moins l'un des nombres $h_1,\ h_2$ est non nul. Soit $t \in$ '$\mathbb{R}^*$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \frac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t} &= \frac{1}{t}\frac{t^5h_1^5}{(th_2-t^2h_1^2)^2+t^4h_1^4} \\ &= \frac{t^2h_1^5}{h_2^2-2th_1^2h_2+2t^2h_1^4} \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas.

a Si $h_2 \neq 0$, alors,

$$\frac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2h_1^5}{h_2^2} \underset{t\to 0}{\to} 0.$$

Donc f est dérivable en $(0,0)$ suivant le vecteur $h=(h_1,h_2)$ et

$$D_h f(0,0) = 0.$$

b Si $h_2 = 0$, alors, comme $h=(h_1,h_2)\neq(0,0)$ ça signifier que $h_1 \neq 0$, et on a

$$\frac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t} = \frac{t^2h_1^5}{2t^2h_1^4} = \frac{h_1}{2} \underset{t\to 0}{\to} \frac{h_1}{2}.$$

Donc f est dérivable en $(0,0)$ suivant le vecteur $h=(h_1,h_2)$ et

$$D_h f(0,0) = \frac{h_1}{2}.$$

3.2.1 Corrections d'exercices supplémentaires

Correction d'exercice 3.12

Soit la fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1 a

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \dashrightarrow^{f} \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \longmapsto f(y,x). \end{array}$$

La matrice Jacobinne de la première application g est la suivante :

$$J_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobinne associée à f est la suivante :

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ce qui signifie que

$$\begin{aligned} J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y, & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement on trouve,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) \quad \text{et,} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x).$$

b Application :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) = 2xy \quad \text{et,} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = 3y^2 + x^2.$$

2 a

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 \dashrightarrow^{f} \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x,x) \longmapsto f(x,x). \end{array}$$

La matrice Jacobinne de la première application h est la suivante :

$$J_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobinne associée à f est la suivante :

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Cela nous donnons

$$F'(x) = J_F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} \right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} x, & x \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} x, & x \end{pmatrix}$$

b Application :

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 \Rightarrow F(x) = f(x,x) = 2x^3 \Rightarrow F'(x) = (3x^2+y^2+2xy)_{(x,x)} = 6x^2.$$

Correction d'exercice 3.13

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x+y^2+z^3$. Calculer la dérivée directionnelle au point $(1,1,1)$ selon la direction des vecteurs suivantes

1 Selon $\overrightarrow{v} = (2,1,3)$. On a

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = (1, 2y, 3z^2).$$

$$\nabla f(1,1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1), \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)\right) = (1,2,3).$$

Par conséquent, on aura,

$$d_v f(1,1,1) = \nabla f(1,1,1).\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} = (1,2,3).\frac{(2,1,3)}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

2 Si $\overrightarrow{v} = (1,-1,1)$. on obtient

$$d_v f(1,1,1) = \nabla f(1,1,1).\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} = (1,2,3).\frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Correction d'exercice 3.14

Posons $f(x,y) = xe^y + e^x \sin(2y)$.

1 Notons que $(0,0)$ est une solution de léquation $f(x,y) = 0$. On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + e^x \sin(2y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + 2e^x \cos(2y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2 \end{cases}$$

Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie au voisinage de 0 tel que $f(x,\varphi(x)) = 0$.

2 Comme,

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -\frac{1}{2}.$$

Alors, l'équation de la droite tangente à φ en $x = 0$ est $y = -\frac{1}{2}x$.

3 On a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Correction d'exercice 3.15

On posons $f(x, y) = 2x^3y + 2x^2 + y^2$.

1 Notons que $(1, 1)$ est une solution de léquation $f(x, y) = 0$. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2y + 4x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3 + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 10 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4 \end{cases}$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie au voisinage de 1 tel que $f(x, \varphi(x)) = 1$.

2 Comme,

$$\varphi'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)} = -\frac{5}{2}.$$

Donc, l'équation de la droite tangente à φ en $x = 1$ est

$$y = -\frac{5}{2}(x - 1) + 1 = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}.$$

3 le développement de Taylor de φ à l'ordre 1 en point 1.

$$\varphi(x) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x - 1) + o(x) = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}x + o(x).$$

Correction d'exercice 3.16

On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $1 + x - y \neq 0$,

$$f(x, y) = \frac{2 + x + y}{1 + x - y} = (2 + x + y) \times \frac{1}{1 + x - y}.$$

Si (x, y) au voisinage de $(0, 0)$ alors, on a aussi $x - y$ au voisinage de 0. En utilisant le développemet limité de Taylor à l'ordre 2 suivant

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2).$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & (2+x+y) \times \dfrac{1}{1+x-y} \\ & = & (2+x+y) \times (1-(x-y)+(x-y)^2+o(x^2+y^2)) \\ & = & 2-x+3y+x^2-y^2-4xy+o(x^2+y^2). \end{array}$$

Chapitre 4

Formules de Taylor et Extremums

4.1 Exercices du série 4

Exercice 4.1

On considère l'application f définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^3 - 3y. \end{array}$$

1. Justifier que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et préciser son gradient, en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de l'application f.
3. Étudier les extrema éventuels de f, en précisant leurs natures (minimum local, minimum global, maximum local, maximum global, ou aucun extremum local donc aucun extremum global).

Exercice 4.2

Soit la fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y - y^3$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Donner leur nature (extremum local, point selle ...).
3. Montrer que le minimum local obtenu n'est pas un minimum global pour f.

Exercice 4.3

Soit la fonctions $f : (x, y) \longmapsto \left(x ln^2 x + y^2\right)$

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. (a) Trouver les points critiques de f.

   (b) Déterminer leur nature.

3 (a) Montrer que le minimum local obtenu est en fait un minimum global.

(b) f admet-elle un maximum global?

Exercice 4.4

Déterminer les points stationnaires et leurs natures dans les cas suivants

1 $f(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2$.

2 $f(x,y) = -x^2 + x - xy + y - y^2$.

3 $f(x,y,z) = x^2 + 2x + y^2 - 3y + 2z^2$.

Exercice 4.5

Étudier les extrema de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$ dans les cas suivants :

1 $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y - 3$ et $g(x,y) = x + y - 40$

2 $f(x,y) = 10\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[3]{y}$ et $g(x,y) = \dfrac{1}{4}\ln x + \dfrac{1}{3}\ln y - 3.$ $(\star)$.

Exercice 4.6

Soit la fonctions

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x + y + z. \end{array}$$

On cherche le maximum de la fonction f sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

1 Expliquer pourquoi ce maximum existe.

2 Ecrire le Lagrangien associé au problème.

3 Déterminer alors le point où le maximum est atteint et la valeur de ce maximum.

4.1.1 Exercices supplémentaires

Exercice 4.7

Soit l'équation :

$$x^5 + xyz + y^3 + 3xz^4 = 2 \tag{4.1}$$

1 Montrer que l'équation (4.1) définit au voisinage du point $(1,-1)$ une fonction implicite $z = g(x,y)$, telle que $g(1,-1) = 1$.

2 Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = g(x, y)$ en point $(1, -1)$.

Exercice 4.8

Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}, \end{array}$$

où les variables x et y sont liées par la contrainte $g(x, y) = x^2 + y = 1$.

1 Déterminer les points critiques du Lagrangien $L(x, y, \lambda)$ associé au problème.

2 En utilisant l'équation de la contrainte, exprimer f en fonction de la variable x seulement.

3 Étudier la fonction obtenue et en déduire les natures des points critiques.

4 La fonction f admet-elle un maximum global sous la contrainte ?

Exercice 4.9

Soit la fonctions

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + y + z. \end{array}$$

où les variables x et y sont liées par la contrainte $g(x, y) = x^2 + y = 1$.

1 Déterminer les points critiques du Lagrangien $L(x, y, \lambda)$ associé au problème.

2 En utilisant l'équation de la contrainte, exprimer f en fonction de la variable x seulement.

3 Étudier la fonction obtenue et en déduire les natures des points critiques.

4 La fonction f admet-elle un maximum global sous la contrainte ?

Exercice 4.10

Calculer la Hessienne de chaque application suivante aux points critiques et étudier leur nature

1 $f(x, y, z) = xy + yz + xz + \dfrac{1}{2}y^4$.

2 $f(x, y) = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$.

4.2 Corrections d'exercices du série 4

Correction d'exercice 4.1

On considère l'application f définie par

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^3-3y. \end{array}$$

1 L'application f est polynomiale en les variables x et y donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (et même de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$).
On calcule, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \quad \text{et,} \ \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3.$$

Donc son gradient en un point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est

$$\nabla f=\left(\ \frac{\partial f}{\partial x}, \ \ \frac{\partial f}{\partial y}\ \right)=\left(\ 2x, \ \ 3y^2-3\ \right)$$

2 Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow 2x=0, \text{ et } 3y^2-3=0\Leftrightarrow 2x=0, \text{ et } (y=-1\vee y=1)$$

Donc la fonction f possède deux poins critiques : $(0,-1)$ et $(0,1)$.

3 On sait que f atteint un extremum local en un point, alors ce point est un point critique de f, d'après la condition nécessaire d'existence d'un extremum. Il y a donc deux points à étudier.

a Étude du point critique $(0,1)$ de f.
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rcl} f(x,1+y)-f(0,1) & = & x^2+y(1+y)^3-3(1+y)-(-2) \\ & = & x^2+y^2(3+y). \end{array}$$

Donc pour tout (x,y) appartenant à

$$\mathcal{U}:=\mathbb{R}\times]-3,3[,$$

qui est voisinage ouvert de $(0,0)$, et $f(x,1+y)\geq f(0,1)$. La fonction f atteint donc un minimum local (valant -2) au point $(0,1)$.
Ce minimum local n'est pas global car

$$f(0,y)=y^3-y, \text{et} \lim_{y\to-\infty} f(0,y)=\lim_{y\to-\infty} y^3=-\infty.$$

b Étude du point critique $(0,-1)$ de f.
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rcl} f(x,-1+y)-f(0,-1) & = & x^2+y(y-1)^3-3(y-1)-(-2) \\ & = & x^2-3y^2+y^3=x^2+y^2(y-3). \end{array}$$

D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(y = 0)$

$$f(x,-1) - f(0,-1) = x^2 \geq 0.$$

D'autre part si $(x = 0)$

$$f(0,-1+y) = -3y^2 + y^3 \underset{y\to 0}{\sim} -3y^2 < 0.$$

Donc la quantité $f(x,-1+y) - f(0,-1)$ n'a de signe constant dans aucun voisinage de $(0,0)$. Ainsi la fonction f n'atteint pas un extremum local (et a fortiori pas un extremum global) au point $(0,-1)$.

Correction d'exercice 4.2

On a f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y - y^3.$$

1 f est de classe C^2 (et même de classe C^∞) peut donc appliquer la méthode des dérivées premières et secondes pour l'étude des extrema locaux. On a, donc

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\ 2(x+y), \ \ 2x + 1 - 3y^2 \ \right)$$

On résoudre le système d'équations Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow x+y = 0, \text{ et } -3y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x, \text{ et } (y = -1 \vee y = \frac{1}{3})$$

Donc la fonction f admet deux poins critiques : $A(1,-1)$ et $B(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. On étudie la nature du points critiques avec la Hessienne, et comme,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y \end{cases}$$

Alors, on trouve :

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2 \end{pmatrix}$$

Donc, le déterminant de la matrice Hessienne au point critique $A(1,-1)$ est

$$\det\Big(Hess_f(1,-1)\Big) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0, \text{ avec, } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 2 > 0$$

Alors, A correspond à un minimum local pour f.
Au point $B(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ on a

$$\det\left(Hess_f(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\right) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

donc B correspond à un point selle (ni minimum local ni maximum local).

2 La valeur de f au point A est $f(1,1) = 1$, or on a par exemple $f(0,2) = 6 < f(1,1)$, donc A n'est pas un minimum global.

Remarque 4.1

On note que, sans même chercher les minima locaux, il était clair dès le début que f ne pouvait admettre de minimum global sur $\mathbb{R}^2$ puisque

$$\lim_{y\to+\infty} f(0,y) = \lim_{y\to+\infty}(y - y^3) = \lim_{y\to+\infty}(-y^3) = -\infty.$$

L'absence de minimum global de f est résultat de ne compacité de $\mathbb{R}^2$ malgré la continuité de f.

Correction d'exercice 4.3

On a $f : (x,y) \longmapsto \left(x(ln^2x) + y^2\right)$.

1 $\mathcal{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2 **a** f est de classe C^∞ sur son domaine et admet pour dérivées partielles

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\ ln^2x + 2\ln x + y^2, \quad 2xy\ \right)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\ 0, \quad 0\ \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} y = 0, \ (x > 0) \\ ln^2x + 2\ln x + y^2 = 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $ln^2x + 2\ln x + y^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \ \vee \ x = e^{-2}$. On a donc deux points critiques : $A(1,0)$ et $B(e^{-2},0)$.

b On les notations de Monge, donc calculons la déterminant de la Hessienne. Alors, on aura :

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1+\ln x}{x}\right) & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Donc, le déterminant de la matrice Hessienne au point critique $A(1,0)$ est

$$\det\left(Hess_f(1,0)\right) = pr - q^2 = 4, \text{ et } p = 2 > 0,$$

où $p = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0),\ r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)$ et $q = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0)$. Alors, A est un minimum local pour f.
Le déterminant de la matrice Hessienne au point critique $B(e^{-2}, 0)$ est

$$\det\Big(Hess_f(e^{-2},0)\Big) = pr - q^2 = -4.$$

Donc B est un point col pour f.

3 (a) On a $f(1,0) = 0$, or f est toujours positive, car,

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f :\ f(x,y) \geq 0.$$

On en déduit que A est le minimum global de f.

(b) On remarque que $\mathcal{D}_f$ est ouvert et comme f n'admet pas un maximum local. Alors, f n'admet pas de maximum global. On peut aussi voir que f n'est pas majorée, car :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x ln^2 x = +\infty.$$

Correction d'exercice 4.4

On étudie la nature des points stationnaires pour chacune des fonctions suivantes

1 $f(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2$. f est de classe C^∞ sur son domaine. Donc, on a

$$\nabla f(x,y) = \left(\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ \right) = \left(\ 8x+2y,\quad 2x+2y\ \right)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\ 0,\quad 0\ \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} x=0 \\ y=0 \end{array}\right)$$

Alors, seul le point $A(0,0)$ peut être un extremum pour f, et la nature de ce extremum dépend le signe de $\Delta(Hess_f)$ en $A(0,0)$. en effet

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme,

$$\det\Big(Hess_f(0,0)\Big) = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0,\quad \text{et}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0.$$

est minimum local en $(0,0)$ et ce minimum est $f(0,0) = 0$.

2 $f(x,y) = -x^2 + x - xy + y - y^2$. On a $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Donc, Les conditions d'extremum nécéssaires sont réalisees aux points solutions du système suivant

$$\nabla f(x,y) = \left(\ 0,\quad 0\ \right) \Rightarrow \left(\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ \right) = \left(\ 0,\quad 0\ \right)$$

$$\begin{cases} -2x+1-y=0 \\ -x+1-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Donc, le point $A\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\Big)$ peut être un extremum pour f. Maintenant, on étude la nature de ce extremum. Alors, on voit que

$$Hess_f\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\Big) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comme, on a

$$\det\Big(Hess_f\big(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\big)\Big) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\big) = -2 < 0.$$

Alors, $f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ est un maximum local de f en point $(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

3 $f(x,y,z) = x^2+2x+y^2-3y+2z^2$. On remarque que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Donc, on pose,

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Par, suite, on a

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

D'où, on trouve,

$$\begin{cases} 2x+2=0 \\ 2y-3=0 \\ 2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=0 \end{cases}$$

Le point tationnaire est $A(-1,\frac{3}{2},0)$. Donc, la nature de ce extremum selon le signe de $\Delta(Hessf)$.

$$Hess_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Par coséquent,

$$\det\Big(Hess_f(-1,\frac{3}{2},0)\Big) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0.$$

Alors, $f(-1,\frac{3}{2},0) = -\frac{13}{4}$ est un minimum pour la fonction f;

Correction d'exercice 4.5

On étudie les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$. telles que

1. $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y - 3$ et $g(x, y) = x + y - 4 = 0$.
   La contrainte permet d'exprimer implicitement y en fonction de x. Donc, on trouve
   $$y = 4 - x.$$
   On étudie alors les variations de la fonction F définie par
   $$F(x) = f(x, y(x)) = 2x^2 + 2x(4 - x) + (4 - x)^2 - 6x - 2(4 - x) - 3 = x^2 - 4x + 5.$$
   F est une fonction polynôme du second degré, comme de coefficient dominant $a = 1 > 0$ et $\Delta = 0$. Alors, F atteint son minium en $x = -\dfrac{b}{2a} = 2$.
   Conclusion : f admet un minimum relatif sous la contrainte $x + y - 4 = 0$ en $(2, 2)$. Ce minimum est égal à $f(2, 2) = 1$.
2. $f(x, y) = 10\sqrt[4]{x} + 2sqrt[3]y$ et $g(x, y) = \dfrac{1}{4}\ln x + \dfrac{1}{3}\ln y - 3$. Reste comme exercice.

Correction d'exercice 4.6

On cherche le maximum de la fonction $f(x, y, z) = x + y + z$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. La surface
   $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$
   Clairement $\mathcal{S}$ un compact, puisque fermé et borné. La fonction f est continue sur ce domaine, donc bornée et atteint ses bornes, en particulier son maximum.
2. Le Lagrangien associé au problème est la fonction de 4 variables :
   $$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$
3. On cherche les points critiques du Lagrangien, ce qui donne : $\nabla f(x, y, z) - \lambda\nabla g(x, y, z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ 1 - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = z = \dfrac{1}{2\lambda} \\ 3\dfrac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{cases}$ Il s'ensuit que l'unique point critique est $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. C'est un maximum ou un minimum : ça ne peut être un minimum, puisqu'on a par exemple $f(1, 0, 0) = 1 < f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$, donc c'est le maximum.

4.2.1 Corrections d'exercices supplémentaires

Correction d'exercice 4.7

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^3$ par : $f(x,y,z) = x^5 + xyz + y^3 + 3xz^4 - 2$

1 Alors, la fonction f est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy + 12xz^3.$$

De plus, $f(1,-1,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1) = 11 \neq 0$. Alors, par le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage $\mathcal{V}(1,-1) \subseteq \mathbb{R}^2$ et une unique fonction $g : \mathcal{V}(1,-1) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathcal{V}(1,-1))$ telle que $g(1,-1) = 1$. et $f(x,y,g(x,y)) = 0$

2 L'équation du plan tangent à la surface $z = g(x,y)$ en $(1,-1)$. On a

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 5x^4 + yz + 3z^4, & xz + 3y^2, & xy + 12xz^3 \end{pmatrix}$$

Donc, on obtient

$$\nabla f(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 7, & 4, & 11 \end{pmatrix}$$

Alors, l'équation est donnée par :

$$\langle \nabla f(1,-1,1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \Leftrightarrow 7x + 4y + 11z - 14 = 0.$$

Correction d'exercice 4.8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$, avec la contrainte $g(x,y) = x^2 + y = 1$.

1 Le Lagrangien du problème s'écrit donc :

$$L(x,y,\lambda) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \lambda(x^2 + y - 1).$$

$$\nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{9}x - 2\lambda x = 0 \\ \frac{1}{2}y - \lambda = 0 \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2\lambda \\ x(\frac{2}{9}x - y) = 0 \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2\lambda \\ x = 0 \vee y = \frac{2}{9} \\ x^2 + y = 1 \end{cases}$$

Donc, par substitution de $x = 0$ par dans la troisième équation, on obtient la première valeur critique $A(0,1)$. De même, en remplaçant $y = \frac{2}{9}$ dans la troisième équation, on obtient $x = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$, donc on trouve les deux autres valeurs critiques $B(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9})$ et $C(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9})$

2 On a $y = 1 - x^2$ donc $y \in]-\infty, 1]$. Par substitution dans f, on obtient la nouvelle fonction d'une seule variable

$$F(x) = f(x, y(x)) = \frac{x^2}{9} + \frac{(1-x^2)^2}{4} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{18}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \mp\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

D'où les trois points critiques du Lagrangien $A(0, 1)$, $B(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9})$ et $C(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9})$. Il est clair d'après l'étude de F que le minimum de cette fonction est atteint aux points $x = \mp\frac{\sqrt{7}}{3}$ et le maximum en $x = 0$. On voit facilement que A est un maximum local pour f, B et C étant des minimums globaux.

3 Alors,

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{7}{9}x + \frac{1}{4}.$$

4 Si f admet un maximum global, il est forcément atteint en son unique maximum local A, or on remarque que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x, 1-x^2) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

Donc f n'admet pas de maximum global sous la contrainte g.

Correction d'exercice 4.9

f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + 2xy + y - y^3$.

1 Déterminer les points critiques de f.

2 Donner leur nature (extremum local, point selle ...).

3 Montrer que le minimum local obtenu n'est pas un minimum global pour f.

Chapitre 5

Intégrales multiples

5.1 Exercices du série 5

Exercice 5.1

Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x)(1+y)}, \qquad D = [0,1]\times[0,1].$
2. $\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy, \qquad D = [0,1]\times[1,2].$
3. $\iint\limits_D \frac{x\sin y}{1+x^2}dxdy, \qquad D = [0,1]\times[0,\pi].$
4. $\iint\limits_D xydxdy, \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x>0,\ y>0 \text{ et } x^2+y^2<1\}.$
5. $\iint\limits_D x\cos y dxdy, \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 0<x<1,\ x^2<y<x\}.$
6. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}, \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x>1,\ y>1, \text{et } x+y<4\}.$

Exercice 5.2

Calculer l'intégrale double $I = \iint\limits_K xy^2dxdy$, sur K tel que

$$K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x+y\geq 1,\ x^2+y^2\leq 1\}.$$

Exercice 5.3

Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes en changeant l'ordre d'intégration si nécessaire

1. $I_1 = \int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1}(x^2+y)dxdy.$
2. $I_2 = \int_{0}^{4}\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(xy+y^3)dxdy.$
3. $I_3 = \int_{1}^{10}\int_{0}^{\frac{1}{y}} ye^{xy}dxdy.$
4. $I_4 = \int_{0}^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}dxdy.$

Exercice 5.4

Calculer l'intégrale triple de la fonction

$$f(x, y, z) = xyz$$

dans le volume limité par les plans $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ et $x + y + z - 1 = 0$

Exercice 5.5

Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D (x + y)^2 e^{x^2 - y^2} dxdy$$

où le domaine d'intégration D est donner comme suit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\},$$

en utilisant le changement de variables suivantes : $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 5.6

En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, calculer les intégrales doubles suivantes

1 $I_1 = \iint\limits_{D_1} \dfrac{dxdy}{1 + x^2 + y^2},\quad D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2 $I_2 = \iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$.

3 $I_3 = \iint\limits_{D_3} \dfrac{dxdy}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}$, où D_3 est la partie du plan comprise entre les courbes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \lambda = 0,\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \mu = 0,\ \text{ et } \lambda > \mu > 1.$$

Exercice 5.7

Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D \frac{\cos(x^2 + y^2)}{2 + \sin(x^2 + y^2)} dxdy$$

où le domaine d'intégration D est déterminer par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

5.1.1 Exercices supplémentaires

Exercice 5.8

Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes

1. $I_1 = \iint\limits_{D_1} (x \sin y) dxdy, \quad D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq \pi, \ 0 \leq y \leq x\}.$
2. $I_2 = \iint\limits_{D_2} 3y^3 e^{xy} dxdy, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ \sqrt{x} \leq y \leq 1\}.$
3. $I_3 = \iint\limits_{D_3} \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy, \quad D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq 4 - x^2\}.$
4. $I_4 = \iint\limits_{D_4} (x^2 + y^2) dxdy, \quad D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 2, \ y \geq 2, \ \text{et } x + y \leq 1\}.$

Exercice 5.9

Soit l'intégrale triple $I = \iiint\limits_{D} \frac{z^3 dxdydz}{(y+z)(x+y+z)}$, où D est le domaine définie par

$$D_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, \ \ y \geq 0, \ z \geq 0, \text{et } x + y + z \leq 1 \geq 0, \leq 4 - x^2\},$$

en utilisant le changement de variables $u = x + y + z, \ v = y + z$ et $w = z$.

5.2 Corrections d'exercices du série 5

Correction d'exercice 5.1

Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{(1+x)(1+y)} = \left(\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}\right)\left(\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y}\right) = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 \Big[\ln(1+y)\Big]_0^1 = \ln^2(2).$

2

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}dy\Big)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (\ln(x^2+4)-\ln(x^2+1))dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\Big(\frac{x^2+4}{x^2+1}\Big)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\Big(1+\frac{3}{x^2+1}\Big)dx.\end{aligned}$$

On calculons cette intégrale par partie, posons donc,

$$\begin{cases} u(x) = \ln\Big(1+\dfrac{3}{x^2+1}\Big) \\ v'(x) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -\dfrac{6x}{(x^2+1)(x^2+4)} \\ v(x) = x \end{cases}$$

Donc, on voit que

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy &= \frac{1}{2}\Big[x\ln\Big(1+\frac{3}{x^2+1}\Big)\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{6x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx + 4\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}dx\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} + \Big[-\arctan(x) + 2\arctan(\frac{x}{2})\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} - \frac{\pi}{2} + 2\arctan(\frac{1}{2}).\end{aligned}$$

3 $\iint_D \frac{x\sin y}{1+x^2}dxdy = \Big(\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx\Big)\Big(\int_0^\pi \sin y dy\Big) = \Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1\Big[\cos y\Big]_0^\pi = \ln 2.$

4

$$\begin{aligned}\iint_D xydxdy &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\Big(\int_0^x \frac{2y}{1+y^2}dy\Big)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\Big[\arctan y\Big]_0^x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx\\ &= \Big[\arctan^2 x\Big]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.\end{aligned}$$

5 En utilisant intégration par partie, on obtient donc,

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x\cos y\,dxdy &= \int_0^1 x\int_{x^2}^{x}\Big(\cos y\,dy\Big)dx\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx+4\int_0^1\frac{1}{x^2+4}dx\\ &= \int_0^1 x\Big[\sin y\,dy\Big]_{x^2}^{x}dx=\frac{1}{2}+\sin 1-\frac{3}{2}\cos 1.\end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^3} &= \int_0^3\Big[\int_1^{4-x}\frac{dy}{(x+y)^3}\Big]dx=\int_1^3\Big[\frac{1}{(x+y)^2}\Big]_1^{4-x}dx=-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{16}x+\frac{1}{x+1}\Big]_1^3\\ &= \int_1^3\Big[\frac{1}{16}-\frac{1}{(x+1)^2}\Big]dx=\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Correction d'exercice 5.2

Au début on va donner la description hiérarchique du domaine K où

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y\geq 1,\ x^2+y^2\leq 1\}.$$

Alors, on a $x+y\geq 1\Rightarrow (x+y)^2\geq 1\Rightarrow x^2+2xy+y^2\geq 1$. Donc, on trouve, $2xy\geq 1-x^2-y^2\Rightarrow xy\geq 0$. Par suite $x\geq 0$ et $y\geq 0$ avec $y^2\leq 1$. Par conséquent

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leq y\leq 0,\ 1-y\leq x\leq\sqrt{1-y^2}\}.$$

$$\begin{aligned}I=\iint\limits_K xy^2dxdy &= \int_0^1\Big[\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}}xdx\Big]y^2dy=\int_0^1\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}}y^2dy\\ &= \int_0^1\Big[\frac{1-y^2}{2}-\frac{(1-y)^2}{2}\Big]y^2dy=\int_0^1\Big[y^3-y^4\Big]dy=\frac{1}{20}.\end{aligned}$$

Correction d'exercice 5.3

Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes en changeant l'ordre d'intégration si nécessaire

1 $I_1 = \int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1}(x^2+y)dxdy.$

$D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ -1\leq x\leq 2,\ x^2-1\leq y\leq x+1\}$. C'est à dire x est fixé. Donc,

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1}(x^2+y)dxdy &= \int_{-1}^{2}\Big[\int_{x^2-1}^{\sqrt{x+1}}(x^2+y)dy\Big]dx = \int_{-1}^{2}\Big[yx^2+\frac{1}{2}y^2\Big]_{x^2-1}^{x+1}dx \\ &= \int_{-1}^{2}\Big[(x+1)x^2+\frac{1}{2}(x+1)^2-(x^2-1)x^2-\frac{1}{2}(x^2-1)^2\Big]dx \\ &= \Big[-\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{2} = \frac{117}{20}. \end{aligned}$$

2 $I_2 = \int_{0}^{4}\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(xy+y^3)dxdy.$

$D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 0\leq y\leq 2,\ \frac{y}{2}\leq x\leq\sqrt{y}\}$. Dans ce cas y est fixé, et on a :

$$\begin{aligned} I_2 = \int_{0}^{4}\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(xy+y^3)dxdy &= \int_{0}^{4}\Big[\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(xy+y^3)dx\Big]dy = \int_{0}^{4}\Big[\frac{yx^2}{2}+xy^3\Big]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}dy \\ &= \int_{0}^{4}\Big[\frac{y^2}{2}+y^{\frac{7}{2}}-\frac{y^3}{8}-\frac{y^4}{2}\Big]dy \\ &= \Big[\frac{y^3}{6}+\frac{2}{9}y^{\frac{9}{2}}-\frac{y^4}{32}-\frac{y^5}{20}\Big]_0^4 = -\frac{364}{15}+\frac{2}{9}\sqrt{262144}. \end{aligned}$$

3 On calcul $I_3 = \int_{1}^{10}\int_{0}^{\frac{1}{y}}ye^{xy}dxdy$. Donc, trouve

$$\begin{aligned} I_3 = \int_{1}^{10}\int_{0}^{\frac{1}{y}}ye^{xy}dxdy &= \int_{0}^{10}\Big[\int_{0}^{\frac{1}{y}}ye^{xy}dx\Big]dy = \int_{0}^{10}\Big[e^{xy}\Big]_0^{\frac{1}{y}}dy \\ &= \int_{0}^{10}(e-1)dy = 9(e-1). \end{aligned}$$

4 Pour, l'intégrale $I_4 = \int_{0}^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}}e^{x^2}dxdy$. on a

$$\begin{aligned} I_4 = \int_{0}^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}}e^{x^2}dxdy &= \int_{0}^{\sqrt{\ln 3}}\Big[\int_{0}^{x^2}e^{x^2}dy\Big]dx = \int_{0}^{\sqrt{\ln 3}}e^{x^2}\Big[y\Big]_0^{x^2}dx \\ &= \int_{0}^{\sqrt{\ln 3}}2xe^{x^2}dx = \Big[e^{x^2}\Big]_0^{\sqrt{\ln 3}} = 2. \end{aligned}$$

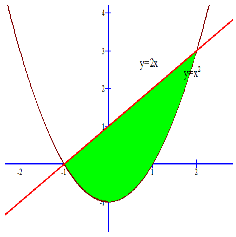


FIGURE 5.1 – D_1.

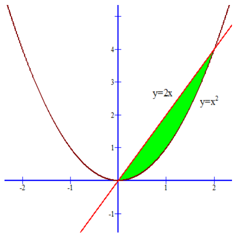


FIGURE 5.2 – D_2.

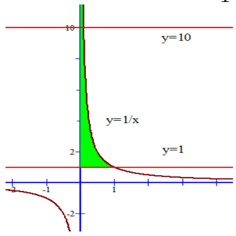


FIGURE 5.3 – D_3.

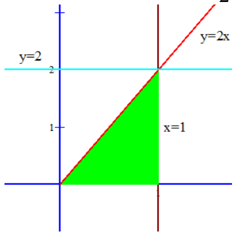


FIGURE 5.4 – D_4.

Correction d'exercice 5.4

On Calcul l'intégrale de la fonction f définie par : $f(x,y,z) = xyz$ dans le volume V limité par les plans $x=0,\ y=0,\ z=0$ et $x+y+z-1=0$. Donc

$$\begin{aligned}
\iiint_V xyzdxdydz &= \int_0^1 x\Big[\int_0^{1-x} y\Big(\int_0^{1-x-y} zdz\Big)dy\Big]dx = \int_0^1 x\Big[\int_0^{1-x} y\Big(\frac{1}{2}z^2\Big)_0^{1-x-y} dy\Big]dx \\
&= \int_0^1 x\Big[\int_0^{1-x} \frac{1}{2}y(1-x-y)^2dy\Big]dx \\
&= \int_0^1 x\Big[\frac{1}{4}y^2(1-x)^2 + \frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{8}y^4(1-x)\Big]_0^{1-x} dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 x(1-x)^4dx = \frac{1}{720}
\end{aligned}$$

Correction d'exercice 5.5

$I = \iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2}dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 1\}$. Au début, on éxprimer x et y en fonction de u et v. Donc, on a $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$

Comme, $x \geq 0$ alors, on aura, $u+v \geq 0 \Rightarrow u \geq -v$.
et on aussi $y \geq 0 \Rightarrow u-v \geq 0 \Rightarrow v \leq u$. par conséquent on trouve $-u \leq v \leq u$.
Et on tenant compte $x+y \leq 1$ alors, on obtient $0 \leq u \leq 1$.

Cela donne le nouveau domaine d'intégration

$$Im(D) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le u \le 1 \text{ et } -u \le v \le u\}.$$

On besoin aussi à le jacobien, donc,

$$\det(J(u,v)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

La nouvelle intégrale est éxprimé par cette expression :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} dxdy = \iint_D |\det(J(u,v))| f(u,v) dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 \Big[\int_{-u}^{u} e^{uv} dv\Big] du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 \Big[\frac{e^{uv}}{2u}\Big]_{-u}^{u} du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 u(e^{u^2} - e^{u^2}) du = \frac{1}{4}\Big[e^{u^2} + e^{u^2}\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\Big[e + e^{-1} - 2\Big] = \frac{ch1 - 1}{2}. \end{aligned}$$

Correction d'exercice 5.6

1 Posons, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, avec $0 \le r \le 1$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors, on voit que

$$I_1 = \iint_{D_1} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{rdrd\theta}{1+r^2} = 2\pi\Big[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big]_0^1 = \pi\ln(2).$$

2 Posons, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, avec $0 \le r \le 1$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Alors, on trouve,

$$I_2 = \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-r^2} rdrd = -\frac{\pi}{4}\Big[e^{-r^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi(e-1)}{4e}$$

3 reste comme exercice.

Correction d'exercice 5.7

Calculons l'intégrale double $I = \iint_D \frac{\cos(x^2+y^2)}{2+\sin(x^2+y^2)} dxdy$, où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

En faisant le changement, posons, donc, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, telles que $r \in [1,2]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. on voit donc,

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D} \frac{\cos(x^2+y^2)}{2+\sin(x^2+y^2)}dxdy = \int_1^{2\pi}\Big[\int_1^{2} \frac{r\cos r^2}{2+\sin r^2}d\theta\Big]dr \\ &= \pi\Big[\ln(2+\sin r^2)\Big]_1^2 = \pi\ln\Big(\frac{\ln(2+\sin 4)}{\ln(2+\sin 1)}\Big). \end{aligned}$$

5.2.1 Corrections d'exercices supplémentaires

Correction d'exercice 5.8

Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes

1 On calcule $I_1 = \iint\limits_{D_1}(x\sin y)dxdy$, sur $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq x\}$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 = \iint\limits_{D_1}(x\sin y)dxdy &= \int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin y dxdy = \int_0^{\pi}\Big[\int_0^{x} x\sin y dy\Big]dx \\ &= \int_0^{\pi}\Big[-x\cos y\Big]_0^x dx = \int_0^{\pi}\Big[x - x\cos x\Big]dx \\ &= \Big[\frac{x^2}{2} - \cos x - x\sin x\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}+2 \end{aligned}$$

2 $I_2 = \iint\limits_{D_1} 3y^3e^{xy}dxdy,\ \ D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint\limits_{D_2} 3y^3e^{xy}dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin y dxdy \\ &= \int_0^{1}\Big[\int_{\sqrt{x}}^{1} 3y^3e^{xy}dy\Big]dx = \int_0^{1}\Big[\int_0^{y^2} 3y^3e^{xy}dx\Big]dy \\ &= \int_0^{1}\Big[3y^2e^{xy}\Big]_0^{y^2}dy = \Big[e^{y^3} - y^3\Big]_0^1 = e-2. \end{aligned}$$

3 Pour l'intégrale $I_3 = \iint\limits_{D_3} \frac{xe^{2y}}{4-y}dxdy,\ \ D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq$

$4 - x^2\}$. on a :

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint\limits_{D_3} \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy = \int_0^4 \Big[\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx \Big] dy = \int_0^4 \Big[\frac{x^2 e^{2y}}{2(4-y)} \Big]_0^{\sqrt{4-y}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2y} dy = \frac{1}{4} \Big[e^{2y} \Big]_0^4 = \frac{e^8 - 1}{4}. \end{aligned}$$

4 $I_4 = \iint\limits_{D_4} (x^2 + y^2) dxdy, \quad D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 2, \ y \geq 2, \ \text{et } x + y \leq 1\}.$

$$\begin{aligned} I_4 &= \iint\limits_{D_4} (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^1 \Big[\int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy \Big] dx = \int_0^1 \Big[(x^2 y + \frac{y^3}{3}) \Big]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \Big[(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3}) \Big] dx = \int_0^1 \Big[-\frac{4}{3} x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3} \Big] dx \\ &= \Big[-\frac{1}{3} x^4 + \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x \Big]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Correction d'exercice 5.9

On commence par écrire les expressions des variables $x, \ y, \ z$ en fonction des vouvelles variables $u, \ v$ et w. On a donc,

$$\begin{cases} u = x + y + z \\ v = y + z \\ w = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u - v \\ y = v - w \\ z = w \end{cases}$$

Alors, le jacobien du changement de variables est donner par

$$\det(J(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Sachant que $x + y + z \leq 1$ on trouve $0 \leq u \leq 1$, et comme $x \geq 0, \ \ y \geq 0, \ z \geq 0$, on aura $0 \leq w \leq v \leq u \leq 1$. Par conséquent, on exprimer l'intégrale I comme suit

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_D \frac{z^3 dxdydz}{(y+z)(x+y+z)} = \int_0^1 \Big[\int_0^u \Big[\int_0^v \frac{w^3}{uv} dw \Big] dv \Big] du \\ &= \int_0^1 \Big[\int_0^u \frac{v^3}{4u} dv \Big] du = \int_0^1 \frac{u^3}{16} du = \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Julien Royer. *Calcul Différentiel et Intégral.* Université de Toulouse III. France. **2015**.

[2] D.E. Medjadi, M. Boukra, A. Djadane et B.K. SadAllah, *Analyse mathématique. Vol.2, Fonctions de plusieurs variables réelles.* O.P.U. Alger, Algérie. **1994.**

[3] Hakim Boumaza et all. *Mathématiques L3 Analyse. Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés.*. Pearson Education, Paris. **2009.**

[4] A. Guyader. *Variables multiples.* Université Rennes 2, France . **2013**.

[5] A. Avez. *Calcul différentiel.* Collection Maîtrise de Mathématiques Pures, Masson, Paris, 1983.

[6] J. M. Monier. *Analyse 4 PCSI-PTSI.* Dunod, Paris 2003.

[7] B. El Mabsout,. *Calcul différentiel, Exercices.* Masson. **1995.**

[8] Jacques Douchet. *Analyse. Recueil d'exercice et aide-mémoire vol.2.* Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015, Lausanne. Italie. **2004.**

[9] Bruno Aebischer. *Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analitique. Cours et exercices corrigés.* Vuibert. Paris. **2011.**

[10] Sylvie Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel, et équations difféerentielles. Cours et exercices corrigés.* Dunod, Paris. **2010**.

[11] Gloria FACCANONI. *L2 MASS. Aide-mémoire et exercices corrigés.* Université du Sud Toulon-Var, France. **2013**.