Chapitre 1

Espace vectoriel

1.1 Espaces et sous-espaces vectoriels

1.1.1 Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou un corps commutatif quelconque.

Définition 1.1 *Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide E muni de deux lois :*
• *une loi de composition interne dite d'addition et noté "$+$", c'est-à-dire de l'application $E \times E$ vers E,*
• *une loi de composition externe dite de multiplication par un scalaire et noté multiplicativement "$\cdot$", c'est-à-dire de l'application $\mathbb{K} \times E$ vers E, telles que :*

(i) $(E, +)$ *est un groupe commutatif;*
(ii) La loi externe doit vérifier pour tout $x \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ et $1 \cdot x = x$ où 1 est le neutre de la multiplication de $\mathbb{K}$;
(iii) Les deux lois vérifient entre elles pour tout $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:
$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ *et* $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$.

Convention :
On dira souvent un "$\mathbb{K}$-espace vectoriel" au lieu d'un "espace vectoriel sur $\mathbb{K}$".

Propriétés élémentaires :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors on a :
• $\alpha \cdot x = 0_E$ si et seulement si $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$;
• $-(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x) = (-\alpha) \cdot x$.

Exemple 1.1 $\mathbb{R}$ *est un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel.*

Exemple 1.2 *L'ensemble $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni des lois usuelles d'addition des fonctions, et de multiplication d'une fonction par un scalaire : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1.1.2 Sous-espaces vectoriels

Dans cette sous-section, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.2 *Une partie F de E est appelée sous-espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de E si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $0_E \in E$;

(ii) $\forall x, y \in E$, $x + y \in E$;

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$; $\alpha \cdot x \in E$.

Interprétation :

Les conditions de la définition ci-dessus signifient qu'un sous-ensemble non vide F de E est un sous-espace vectoriel de E si F est stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire.

Lemme 1.1 *Une partie F de E est appelée sous-espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de E si :*

(i) $(F, +)$ *est un sous-groupe de* $(E, +)$;

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$; $\alpha \cdot x \in E$.

Théorème 1.1 (Théorème de caractérisation) *F est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de E si et seulement si F est non vide et vérifie :*

$$\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}; \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F. \tag{1.1}$$

Corollaire 1.1 *Si F est un sous-espace vectoriel de E, et qu'on le munit des lois induites par celles de E, alors c'est un espace vectoriel. Autrement dit, un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel.*

Exemple 1.3 *E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.*

Exemple 1.4 *Une droite passant par l'origine, un plan passant par l'origine sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*

Exemple 1.5 *L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 1 = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, car le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^2}$ n'appartient pas à F.*

Proposition 1.1 *L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.*

Remarque 1.1 *En général, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel (sauf si l'un des deux espaces contient l'autre). En effet, si nous considérons $E = \mathbb{R}^2$ et les deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = o\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = o\}$. Alors, $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Par exemple, $(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est la somme d'un élément de $\mathcal{D}_1$ et d'un élément de $\mathcal{D}_2$, mais n'est pas dans $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.*

1.2 Familles libres, Génératrices, Bases

Notion de combinaison linéaire :

Une combinaison linéaire de vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, est un vecteur qui peut s'écrire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i$. Les éléments $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.

Exemple 1.6 *Soient $u_1, u_2, ..., u_n$; n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On peut toujours écrire 0_E comme combinaison linéaire de ces vecteurs, car il suffit de prendre tous les coefficients nuls.*

Remarque 1.2 *Si F est un sous-espace vectoriel de E, et si $u_1, u_2, ..., u_p \in F$, alors toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i$ est dans F.*

Notation 1.1 *Etant donné des vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on note $Vec(u_1, u_2, ..., u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, u_2, ..., u_n$. Alors on écrit :*

$$Vec(u_1, u_2, ..., u_n) = \{u \in E \mid \exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n; u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i\}.$$

Exemple 1.7 $Vec(0_E) = \{0_E\}$.

Maintenant, on considère une famille non vide $A = (u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.3 *On dit que A **engendre** E, ou encore qu'elle est **génératrice** de E si et seulement si $Vec(u_1, u_2, ..., u_p) = E$. En d'autres termes, tout vecteur de E est combinaison linéaire des éléments de A.*

Définition 1.4 *On dit que A est **libre** si et seulement si le vecteur nul $\{0_E\}$ est combinaison linéaire des éléments de A de façon unique. Autrement dit :*

$$si \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i = 0_E \text{ alors } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 0_E .$$

Remarque 1.3 *Nous pouvons utiliser les expressions suivantes :*
- Si A est libre alors on dit aussi que les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_p$ sont linéairement indépendants.
- Si A est n'est pas libre on dit que A est liée.

Propriétés :

1- Toute partie contenant une partie génératrice de E est encore une partie génératrice.
2- Une famille d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
3- Tout famille qui contient le vecteur nul est liée.
4- Toute famille qui contient une famille liée est liée.
5- Toute partie contenue dans une partie libre est libre.

Définition 1.5 *On dit que A est une **base** d'un sous-espace vectoriel F de E si elle est **libre et génératrice**. En d'autres termes, tout vecteur de F est combinaison linéaire des éléments de A de façon unique. On a donc :*

$$\forall u \in F, \exists!(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p; u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i ,$$

*où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sont **les coordonnées** du vecteur u dans la base A, et on dit que F est de **dimension finie**.*

1.3 Espaces vectoriels de type fini

Définition 1.6 *Un espace vectoriel est dit de type fini s'il admet une famille génératrice finie. Autrement dit : si un espace vectoriel est engendré par une famille finie de vecteurs, on dit qu'il est de type fini.*

Théorème 1.2 (Théorème de la dimension) *Dans un espace vectoriel de dimension finie E, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre noté $dim(E)$ est appelé la dimension de E.*
Soit A une famille d'éléments de E de dimension finie n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est une base de E.
(ii) A est libre et génératrice de E.
(iii) A est libre et de cardinal n.
(v) A est génératrice de E et de cardinal n.

Remarque 1.4 *Pratiquement, on utilise le théorème ci-dessus pour montrer qu'une famille A est une base de E.*

Exemple 1.8 *Soient $u_1(1,2), u_2(2,-1)$ deux vecteurs de l'éspace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Vérifier que la famille $A = (u_1, u_2)$ engendre $\mathbb{R}^2$. Que peut-on conclure ?*
Pour montrer que A est une famille génératrice, on cherche deux réelles λ_1, λ_2 tel que : pour tout $u(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$. Après le calcul on aura $\lambda_1 = \frac{1}{5}(x+2y)$, $\lambda_2 = \frac{1}{5}(2x-y)$. Ce qui signifie que A engendre $\mathbb{R}^2$. D'autre part, il est clair que A est libre, de cardinal 2, donc A est une base de $\mathbb{R}^2$.

Corollaire 1.2 *Tout espace vectoriel de type fini admet une base finie, et toutes ses bases ont le même cardinal.*

Corollaire 1.3 *Dans un espace vectoriel de dimension n, on a :*
- Toute famille libre a au plus n éléments.
- Toute famille génératrice a au moins n éléments.

Proposition 1.2 *Dans un espace vectoriel de type fini E, toute famille libre (ou génératrice) dont le nombre d'élément est égal à la dimension de E est une base.*

1.3.1 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 1.7 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $G = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ une famille de m vecteurs de E. Le rang de la famille G noté $rg(G)$ est la dimension du sous-espace vectoriel $F = Vect(v_1, v_2, ..., v_m)$ engendré par les vecteurs $v_1, v_2, ..., v_m$, i.e.,*

$$rg(G) = dim(F)\,.$$

Propriétés :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $G = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ une famille de vecteurs de E. Alors on a :

- $0 \leq rg(G) \leq m$.
- Si $dim(F) = n$ (finie), alors $rg(G) \leq n$.
- $rg(G) = m$ si et eulement si G est libre.
- $rg(G) = 0$ si et eulement si tous les vecteurs de G sont nuls.

Exemple 1.9 *Soit* $G = \{v_1 = (2,3), v_2 = (4,2), v_3 = (-3,4)\}$ *une famille de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$. *Déterminer le rang de* G.
Il est clair que v_2 *et* v_3 *sont linéairement indépendants. D'autre part, en résolvant le système linéaire* $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 = 0$, *on obtient* $2v_1 - v_2 - v_3 = 0$. *La famille* G *est donc liée. On en déduit que* $Vect(v_1, v_2, v_3) = Vect(v_2, v_3)$. *Donc,* $rg(G) = 2$.

1.4 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1.8 *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E. *On appelle somme de* F_1 *et de* F_2 *l'ensemble noté* $F_1 + F_2$, *des vecteurs qui sont la somme d'un vecteur de* F_1 *et d'un vecteur de* F_2 :

$$F_1 + F_2 = \{u \in E \mid u = u_1 + u_2, u_1 \in F_1, u_2 \in F_2\}.$$

Remarque 1.5 *On peut caractériser les vecteurs* u *de la somme* $F_1 + F_2$, *par :*

$$u \in F_1 + F_2 \Leftrightarrow \exists (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2 \mid u = u_1 + u_2 \,.$$

Exemple 1.10 *Nous considérons deux droites vectorielles* D_1 *et* D_2 *dans l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}^2$. *Alors, il est bien clair que* $D_1 + D_2 = \mathbb{R}^2$.

Proposition 1.3 *Si* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E, *alors* $F_1 + F_2$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

1.5 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1.9 *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E. *On dit que la somme* $F_1 + F_2$ *est directe si tout vecteur de* $F_1 + F_2$ *se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de* F_1 *et d'un élément de* F_2.

Notation 1.2 *Lorsque* F_1 *et* F_2 *sont en somme directe, on note* $F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2$.

Remarque 1.6 *On peut caractériser les sous-espaces vectoriels en somme directe, par :*

$$F_1 + F_2 \text{ est directe } \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \,.$$

Théorème 1.3 (Formule de Grassmann) *Si* F_1 *et* F_2 *sont des sous-espaces vectoriels de* E *et que* $F_1 + F_2$ *est de type fini, alors*

$$dim(F_1 + F_2) = dim(F_1) + dim(F_2) - dim(F_1 \cap F_2) \,.$$

Théorème 1.4 *Si* E *est de type fini, alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $E = F_1 \oplus F_2$.

(ii) $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ *et* $dim(E) = dim(F_1) + dim(F_2)$.

(iii) $E = F_1 + F_2$ *et* $dim(E) = dim(F_1) + dim(F_2)$.