Université Mohamed Boudiaf-M'sila — Département de l'informatique
Première année informatique — 2022-2023

Série d'exercices N°01.
Algèbre 2

Exercice 01 :
On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$.

On définit une loi de composition interne $+$ (différente de l'addition usuelle) par :

$$\forall (a, b), (c, d) \in E \ : \ (a, b) + (c, d) = (ac, b + d)$$

et une loi de composition externe $\cdot$ (différente de la multiplication usuelle) par :

$$\forall (a, b), (c, d) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \ : \ \lambda(a, b) = (a^\lambda, \lambda b)$$

Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 02 :
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 2\}$.
3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$.
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x^2\}$ (*).
5. $E_5 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ deg(P) \leq 2\}$.

Exercice 03 :

1. Soit : $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-1, 2, -1)$, et $w_1 = (6, 0, 2), w_2 = (1, 4, -1), w_3 = (0, 3, -1)$
   (a) Déterminer les sous-espaces vectoriels V et W de $\mathbb{R}^3$ engendrés par les vecteurs v_1, v_2 et w_1, w_2, w_3, respectivement.
   (b) Que concluez-vous ?.
2. Soient les deux sous-espaces vectoriels
   $$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\right\} \ et \ F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\right\}$$
   (a) Donner une famille génératrice de E et une famille génératrice de F.
   (b) Vérifier que $E \cap F$ est un sous-espaces vectoriel et trouver une famille génératrice.

Exercice 04 :

1. Montrer que la famille $\{(1, 2), (1, 1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la famille $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est libre de $\mathbb{R}^3$.

3. Montrer que la famille $\{(1,2),(1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$,
   et que la famille $F_1 = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 05 : (**À domicile**)
Dans $\mathbb{R}^3$ on considéré les sous ensembles suivants :

$$E_1 = \left\{(x+y, y-3x, x) \in \mathbb{R}^3,\ x, y \in \mathbb{R}\right\} \ et\ E_2 = \left\{(z, -2z, z) \in \mathbb{R}^3,\ z \in \mathbb{R}\right\}$$

avec E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.
3. En déduire $dimE_1$ et $dimE_2$.
4. Montrer que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.
5. Déduire si la somme est directe ou non.

Exercice 06 : (**À domicile**)
Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z = 0 \wedge 2x-y-z = 0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.
On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x,y,z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.