2 Applications linéaires

2.1. Défnitions et exemples

Définition 2.1 (Application linéaire)**.** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est **linéaire** (ou **morphisme**) si et seulement si :*
$\forall u_1, u_2 \in E, f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$,
où d'une manière équivalente, si :
$\forall u_1, u_2 \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2) = \lambda \cdot f(u_1) + \mu \cdot f(u_2)$.

Exemple 2.1. *On considère l'application f définie par :*
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *telle que* $f(x, y) = (x + y; x - y; 2y)$, *alors*

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2) &= f(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2; \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2) \\
&= (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 + \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2; \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 - \lambda \cdot y_1 - \mu \cdot y_2; \\
&\qquad 2\lambda \cdot y_1 + 2\mu \cdot y_2) \\
&= \lambda \cdot (x_1 + y_1; x_1 - y_1; 2y_1) + \mu \cdot (x_2 + y_2; x_2 - y_2; 2y_2) \\
&= \lambda \cdot f(u_1) + \mu \cdot f(u_2).
\end{aligned}$$

D'où f est linéaire.

Notation 2.1. *On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.*

Quelques propriétés :
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on a :
- $f(0_E) = 0_F$;
- $\forall u \in E, f(-u) = -f(u)$;
- $\forall u_i \in E, \forall \lambda_i \in \mathbb{K}$ avec $i \in \{1, ..., p\}$, $f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i) = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i \cdot u_i)$.

Définition 2.2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que f est un :*
- ***Endomorphisme*** *si $F = E$ (c.à.d $f \in \mathcal{L}(E)$).*
- ***Isomorphisme*** *si elle est bijective.*
- ***Automorphisme*** *si elle est bijective et $F = E$.*
- ***Forme linéare*** *si $F = \mathbb{K}$, i.e., $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.*

2.2. Image et noyau d'une application linéaire

Définition 2.3. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle*
• ***image*** *de f et on note $Im(f)$ le sous-espace vectoriel de F défini par :*

$$Im(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\};$$

• ***noyau*** *de f et on note $Ker(f)$ le sous-espace vectoriel de F défini par :*

$$Ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Proposition 2.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
• *f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.*
• *f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$.*

Exemple 2.2. *On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, définie par $f : (x, y) \to (x + y, x - y, x + z)$.*
1- Déterminer l'image de f, son noyau.
2- f est elle injective ? surjective ?
• *Soit $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors,*

$$\begin{aligned}
Y \in Im(f) &\Leftrightarrow \exists X(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2) \\
&\Leftrightarrow \exists X(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists X(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} x_1 = \frac{y_1+y_2}{2} \\ x_2 = \frac{y_1-y_2}{2} \\ y_1 - y_3 = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que $Im(f) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; y_1 - y_3 = 0\}$.
• *Soit $X(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors,*

$$\begin{aligned}
X(x_1,x_2)\in Ker(f) &\Leftrightarrow f(x_1,x_2)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \exists X(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2; \begin{cases} x_1+x_2=0\\ x_1-x_{2=0}\\ x_1+x_2=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0\\ 2x_1=0.\end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que $Ker(f)=\{(0,0)\}$.
- *On a* $Ker(f)=\{(0,0)\}$, *alors* f *est injective.*
- *On a* $Im(f)=\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3; y_1-y_3=0\}\neq\mathbb{R}^3$. *En particulier,* $(1,2,3)\notin Im(f)$, *alors* f *n'est pas surjective.*

2.3. Applications linéaires en dimension finie

Proposition 2.2. *Soient* $f,g\in\mathcal{L}(E,F)$ *où* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et,* $e_1,e_2,...,e_n$ *;* n *vecteurs de* E *tel que* n *un entier naturel non nul* ($n\in\mathbb{N}^*$).
Si $A=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ *est une base de* E*, alors*

$$\forall p\in\mathbb{N}^*, f(e_p)=g(e_p)\Leftrightarrow\forall x\in E, f(x)=g(x)\,.$$

Exemple 2.3. *Soit* $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *telle que* $f(e_1)=(2,1)$ *et* $f(e_2)=(-1,-1)$ *avec* $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.
Donner l'expression de f.
On a $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$. *Donc,* $f(x,y)=f(x(1,0)+y(0,1))$. *Comme* f *est linéaire alors* $f(x,y)=xf(1,0)+yf(0,1)=x(2,1)+y(-1,-1)=(2x-y,x-y)$. *Ainsi l'expression de* f *en tous points* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *est de la forme :* $f(x,y)=(2x-y,x-y)$.

2.3.1. Théorème du rang

Théorème 2.1 (Théorème du rang)**.** *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie et,* $f\in\mathcal{L}(E,F)$. *Alors on a l'égalité :*

$$dim(E)=dim(Im(f))+dim(ker(f))\,.$$

Définition 2.4 (Rang d'une application linéaire)**.** *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie et,* $f\in\mathcal{L}(E,F)$. *On appelle rang de* f *, noté* $rg(f)$, *la dimension de* $Im(f)$*, i.e.,*

$$rg(f) = dim(Im(f)) .$$

Remarque 2.1. *Le théorème du rang s'écrit donc aussi sous forme*

$$rg(f) = dim(E) - dim(Ker(f)) .$$

En particulier, le rang de f *est toujours inférieur ou égal à la dimension de* E*.*

Proposition 2.3. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie et,* $f \in \mathcal{L}(E, F)$*.*

(i) Si f *est injective, alors* $dim(E) \leq dim(F)$*.*

(ii) Si f *est surjective, alors* $dim(F) \leq dim(E)$*.*

(iii) Si f *est bijective, alors* $dim(F) = dim(E)$*.*

Théorème 2.2. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *où* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie et que* $dim(F) = dim(E)$*. alors on a les équivalences suivantes :*

$$f \text{ est injective } \Leftrightarrow f \text{ est surjective } \Leftrightarrow f \text{ est bijective } .$$

Corollaire 2.1. *Le résultat du Théorème 2.2, s'applique en particulier aux endomorphismes. Autrement-dit, si* $f \in \mathcal{L}(E)$*. On les équivalences suivantes :*

$$ker(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow Im(f) = E \Leftrightarrow f \text{ est bijective } .$$

Définition 2.5. *Soient* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(F, G)$ *où* E*,* F *et* G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Alors,*

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E, G) .$$

Propriétés :

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$ on a :

- $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$;
- $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$;
- $(\lambda \cdot g) \circ f = \lambda \cdot (g \circ f) = g \circ (\lambda \cdot f)$.

Définition 2.6. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et,* $f \in \mathcal{L}(E, F)$*.*

- *On dit que* f *est inversible si, pour tout* $y \in F$*, l'équation* $y = f(x)$ *admet une unique solution* $x \in E$*. Autrement dit, si* f *est bijective.*
- *Si* f *est inversible, alors* f *admet une bijection réciproque notée* f^{-1}*, où* $f^{-1} : F \to E$ *est définie par* $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$*.*

Propriétés :

• Soit f un isomorphisme de E dans F. Alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

• Soit f un automorphisme de E. Alors f^{-1} est un automorphisme de E.

• Soient f et g deux automorphismes de E. Alors $g \circ f$ est un automorphisme de E et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.