UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF-M'SILA — DÉPARTEMENT DE L'INFORMATIQUE
Première année informatique — 2022-2023

Série d'exercices N°02.
Algèbre 2

Exercice 01 :
Déterminer si les applications suivantes sont linéaires

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_1(x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$,
2. $f_2\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f_2(x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0)$,
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_3(x, y, z) \mapsto (xy, x, y)$,
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_4(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ (*),
5. $f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3,\ f_5(P) \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$.

Exercice 02 :
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$f(e_1) = (5, -1, 2); \quad f(e_2) = (-1, 5, 2); \quad f(e_3) = (2, 2, 2)$$

Exercice 03 :
On considère les applications f et g définies par

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un application linéaire.
2. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ et $b, c \in \mathbb{R}^2$, non nuls, tel que $ker(f) = Vect\{a\}$, et $Im(f) = Vect\{b, c\}$, déterminer les vecteurs qui convient. Puis préciser leurs dimensions.
3. L'application f est injective ? surjective ? bijective ?
4. Soit l'application linéaire g définie par :

$$\begin{aligned} g :&\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &(x, y) \mapsto g(x, y) = (y, x, x + y) \end{aligned}$$

   (a) Déterminer $Ker(g)$, $Im(g)$ et préciser leurs dimensions.
   (b) L'application f est injective ? surjective ? bijective ?
   (c) Déterminer $f \circ g$.
   (d) Existe-t-il une application linéaire $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant $h \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$?

Exercice 04 :
Soient $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \ deg(P) \leq 2\}$ et f une application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] : \ f(P) = -\frac{(X+1)^2}{2}P'' + (X+1)P'$$

Où P' et P'' sont les dérivées de polynôme P.

1. Déterminer l'expression de $f(P)$ pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, en déduire que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $f \circ f = f$.
3. Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$.
4. Calculer $dim\ Ker(f)$ et $dim\ Im(f)$.
5. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Exercice 05 : (Devoir à la maison)

1. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{array}{ll} f(e_1) = e'_1 + e'_2 & , \ f(e_2) = -e'_1 + e'_2 \\ f(e_3) = e'_1 + 3e'_2 + 2e'_3 & , \ f(e_4) = e'_1 + e'_2 + e'_3 \end{array}$$

   où la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est notée $B_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et celle de $\mathbb{R}^3$ est notée $B_2 = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$

   (a) Déterminer l'application linéaire f.

2. On considère l'application g suivante

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & g(x,y,z) = (x-y+z, y+z) \end{array}$$

   (a) Montrer que g est linéaire.
   (b) Déterminer $Ker(g)$ et $Im(g)$ et préciser leurs dimensions.
   (c) g est-elle injective ? surjective ?

Exercice 06 :(Devoir à la maison)
Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $ker(f) \cap Im(f) = f(ker(f \circ f))$.