CHAPITRE 2
Traitement du signal analogique

1. Définition de la série de Fourier

La série de Fourier d'un signal réel x(t) périodique de période T=1/f_0 est la décomposition du signal en valeur moyenne, somme de termes en cosinus et somme de termes en sinus tel que:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi f_0 t)$$

f_0 fréquence fondamentale du signal
$\frac{a_0}{2}$ est la valeur moyenne ou composante continue
avec :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi n f_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(2\pi n f_0 t)\,dt$$

Si le signal est pair b_n=0

Si le signal est impair a_0=$a_n = 0$

2. Série de Fourier en cosinus

Cette série en cosinus s'écrit sous la forme :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t) + \alpha_n)$$

Avec

$$A_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$

$$\alpha_n = arctang\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

3. Série de Fourier en complexe

La série de Fourier en cosinus peut être transformé en série de Fourier complexe :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(jn)\, e^{j2\pi f_0 nt}$$

Avec : $X(jn) = \frac{1}{T}\int^{T} x(t)e^{j2\pi f_0 nt}dt$

4. Relation entre les trois représentations de Fourier

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = X(0)$$

$$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$

$$|X(jn)| = \frac{A_n}{2}$$

5. Théorème de la puissance ou de Parseval

La définition de la puissance moyenne est la suivante :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt = X_{eff}^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(jn)|^2$$

1. **Définition** : soit un signal *x(t)*, sa TF est une fonction complexe de la variable réelle *f* définie par :

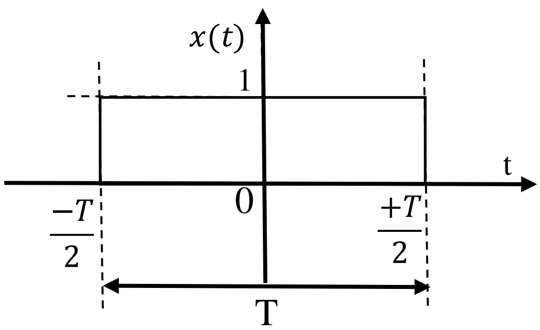
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$

X(f) est la superposition d'une infinité de raies qui s'étendent dans le domaine fréquentiel, de -∞, +∞.

Remarque *: La TF de x(t) existe si l'intégrale de x(t) est une fonction bornée*

2. **Exemple**

Soit la fonction *rect* ou porte ; $x(t) = rect(\frac{t}{T})$



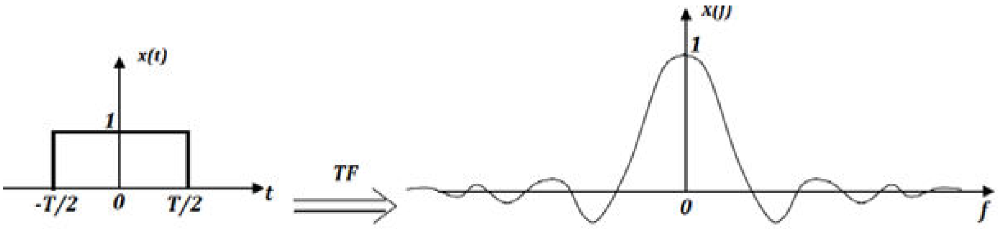
Calculer sa transformer de Fourier

On a : $x(t) = \begin{cases} 1 & si\ t\epsilon \left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = X(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{-1}{j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f t}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{\pi f}\left(\frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi f}\sin(\pi f T) = T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = Tsinc(fT)$$



3. Propriétés de la TF

Soit deux fonctions x(t) et y(t) ayant pour TF, X(f) et Y(f) respectivement : on pout vérifier les propriétés suivantes :

- **Linéarité** : $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(f) + bY(f)$
- **Parité** : La TF conserve la parité

x(t)	*X(f)*
Réelle paire	*Réelle paire*
Réelle impaire	*Imaginaire impaire*
Imaginaire paire	*Imaginaire paire*
Imaginaire impaire	*Réelle impaire*

- **Complexe conjugué** :$x^*(t) \leftrightarrow x^*(-f)$
- **Changement d'échelle sur t** : $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X(\frac{f}{a})$
- **Translation sur t (théorème de retard):** Le décalage d'une fonction original correspond à la multiplication de la transformée par un opérateur de rotation.

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi t_0}$$

- **Translation sur f ou modulation** : $x(t)e^{-j2\pi f_0} \leftrightarrow X(f-f_0)$

Dérivation par rapport à t :

$$\frac{dx^n(t)}{dt^n} \leftrightarrow (-j2\pi f)^n X(f)$$

- **Intégration par rapport à t** :

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) \;\; si \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, d\tau = 0$$

- **Dualité de la TF**

  Si $x(t) \leftrightarrow X(f)$

  Alors ; $X(t) \leftrightarrow x(-f)$
- **Symétrie dans le cas des signaux réels**

  Si $x(t)$ est un signal réel alors ; $X(f) = X(-f)$, donc :

  $$|X(f)| = |X(-f)| \; et \; \boldsymbol{\varphi(f)} = -\boldsymbol{\varphi(-f)}$$

  Le spectre d'amplitude est une fonction paire et le spectre d'argument est impair
- **Symétrie dans le cas des signaux imaginaires purs**

  Si $x(t)$ est un signal imaginaire pur alors ;$X(f) = -X(-f)$

	s(t)	S(F)
Linéarité	$\alpha.s(t) + \beta.r(t)$	$\alpha.S(f) + \beta.R(f)$
Translation	$s(t-t_0)$	$e^{-2j\pi f t_0} S(f)$
	$e^{2j\pi f_0 t} s(t)$	$S(f-f_0)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
Dérivation	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n S(f)$
Dilatation	$s(at)$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} S(\frac{f}{a})$
Convolution	$s(t) * r(t)$	$S(f) \bullet R(f)$
	$s(t) \bullet r(t)$	$S(f) * R(f)$
Dualité	S(t)	s(-f)

1. Transformée de Fourier usuelles :

$x(t)$	$X(f)$
1	$\delta(f)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
Cosinus $cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
Sinus $sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
Signe $sgn(t)=\frac{t}{\lvert t\rvert}$	$\begin{cases}\frac{1}{j\pi f} & si\ f\neq 0\\ 0 & si\ f=0\end{cases}$
Echelon $u(t)$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{j\pi f}+\delta(f))$
Impulsion exponentielle $e^{-at}u(t)\ (a>0)$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$t.e^{-at}u(t),\ (a>0)$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^2}$
Double exponentielle $e^{-a\lvert t\rvert}\ (a>0)$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Dirac retardé $\delta(t-t_0)$	$e^{j2\pi f t_0}$
Peigne de Dirac $\sum_{n\to-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k\to-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{k}{T})$
Rectangle de largeur T $rect_T(t)=rect(\frac{t}{T})$	$T\ sinc(fT)$
Triangle de largeur 2T $tri_T(t)=tri(\frac{t}{2T})$	$T\ sinc^2(fT)$

Produit de convolution et corrélation

IV.1 Produit de convolution

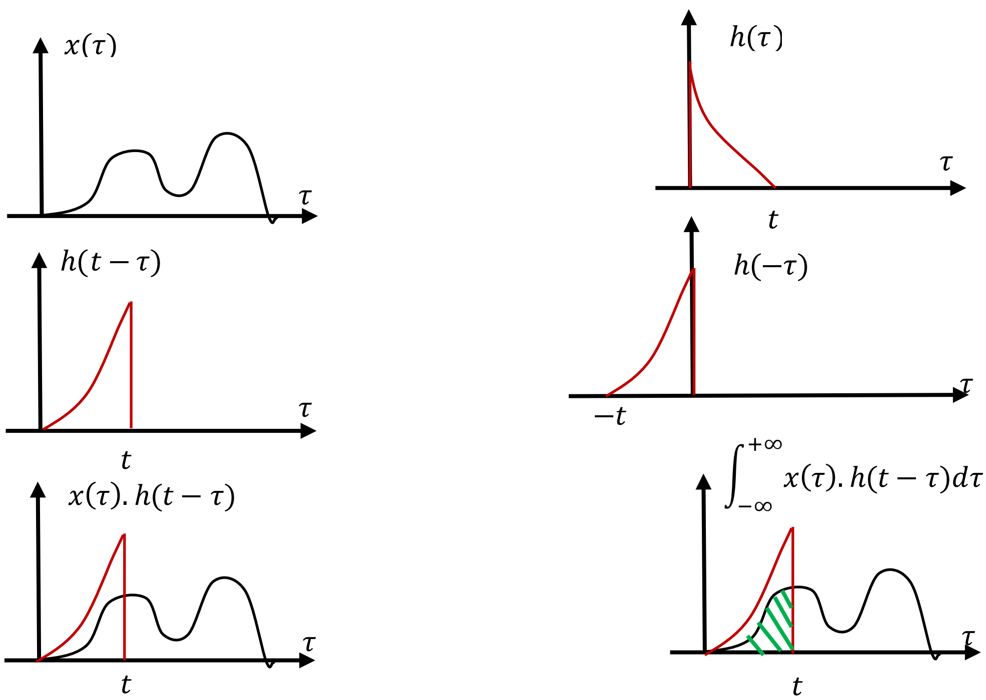
Le produit cde convolution d'un signal x(t) par un autre signal h(t) est donnée par :

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u).h(t)du = (h * x)(t) = h(t) * x(t)$$

Le produit de convolution est commutatif

On note souvent : $(h * x)(t) = x(t) * h(t)$

Example :



1. Théorème de Plancherel

$$x(t).y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$$
$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f).Y(f)$$

La transformée de Fourier du produit de deux fonctions est la convolution entre les TF de chaque fonction et la transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est le produit des deux fonctions.

2. Dérivation en fréquence :

$$\frac{dX(f)}{df} \leftrightarrow (-j2\pi ft)x(t)$$
$$\frac{dX^n(f)}{df^n} \leftrightarrow (-j2\pi ft)^n x(t)$$

3. Corrélation

En traitement de signaux, il est souvent nécessaire de comparer deux signaux, cela peut se faire de plusieurs manières. La méthode qui est la plus utilisée consiste à une mesure de leur similitude de forme et de position en faisant translater l'un des signaux par rapport à l'autre mathématiquement. Cette opération est un produit scalaire.

- **Définition de la corrélation**

C'est la relation qui indique le degré de similitude entre deux fonctions (signaux).

a) Fonction d'inter-corrélation dans le cas des signaux à énergie finie (cas des signaux périodiques) :

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t-\tau)dt$$

$y(t)$ est translaté d'une quantité τ

b) Fonction d'auto-corrélation dans le cas des signaux à énergie finie :

Cette fonction permet de comparer un signal avec lui-même avec l'intervalle du temps *t*.

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

La valeur à l'origine $(\tau = 0)$ correspond à l'énergie du signal

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,(t)x(t)dt = E_x$$

c) fonction d'inter-corrélation dans le cas des signaux à puissance moyenne finie :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x\,(t)y(t-\tau)dt$$

d) fonction d'auto-corrélation dans le cas des signaux à puissance moyenne finie :

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x\,(t)x(t-\tau)dt$$

La valeur à l'origine $(\tau = 0)$ correspond à la puissance moyenne du signal

$$R_x(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x\,(t)x(t)dt = P_x$$