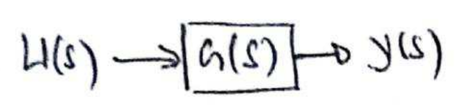
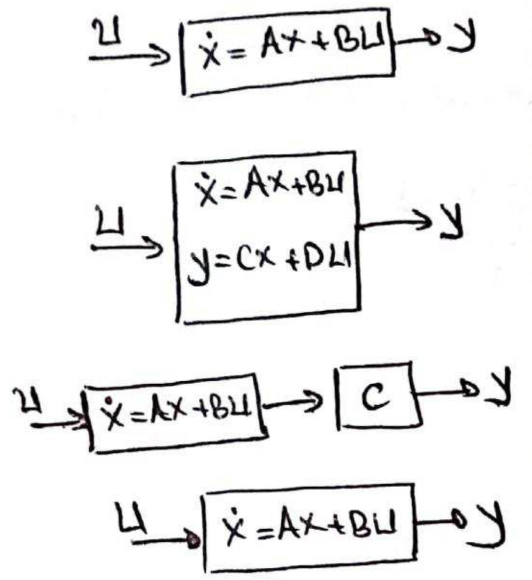
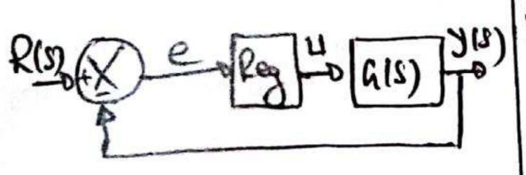
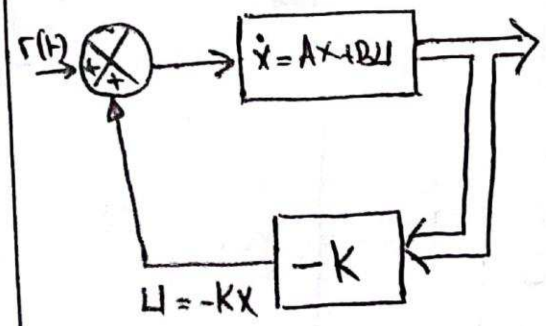
Chapitre 5: Commande par retour d'état

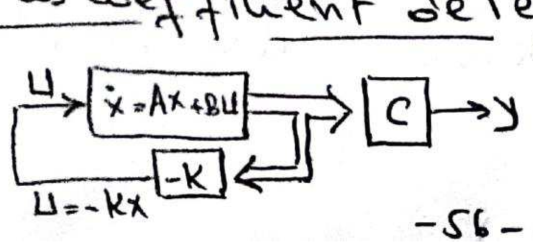
Régulation de chapitre 02 : Commande Par retour d'état

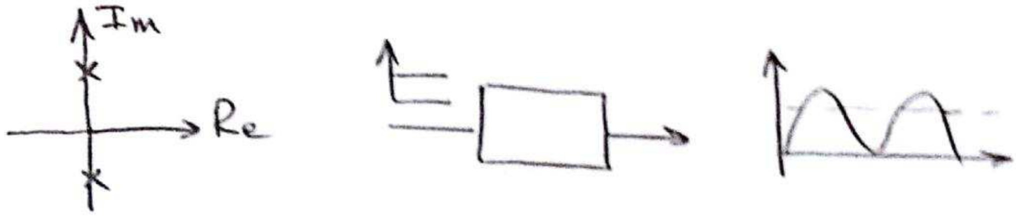
Régulation dans l'espace d'état :

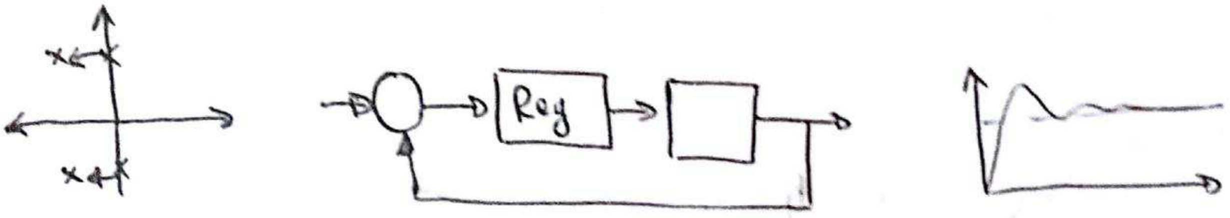
Notation :

FT	Retour d'état
	
	 K : gain de retour gain d'état

-Calcule les coefficient de réglage :







On supose que $r=0$

da loi de Commande est une simple combinaison Lineaire de la forme

$$U = -KX = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = -K_1 x_1 - K_2 x_2 - \cdots - K_n x_n$$

K représente une matrice (vecteur) Constante qu'on l'appelle matrice de gain régulateur

$\dot{x} = AX + BU$ le syst à reguler (movais poles) $(U = -KX)$

$\dot{x} = [A - BK] x$

Nous remarquons que A s'est transformées en A-BK ont peut choisir nous même les nouvaux pôles A-BK

$$\det(\lambda I - (A - BK)) = (\lambda - P_1)(\lambda - P_2) \cdots (\lambda - P_n)$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont les Poles désirés

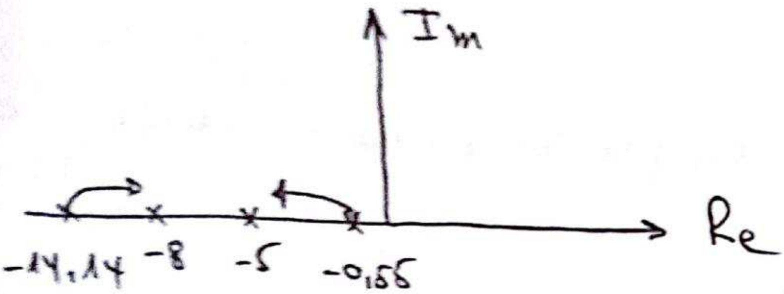
<u>Exemple</u>:

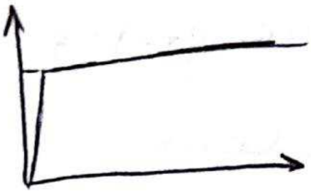
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 8 & \lambda + 15 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 + 15 + 8 = 0 \quad \begin{cases} P_1 = -0{,}55 \\ P_2 = -14{,}54 \end{cases}$$





système 2ème ordre $\Rightarrow K = [K_1 \; K_2]$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \; K_2]$$

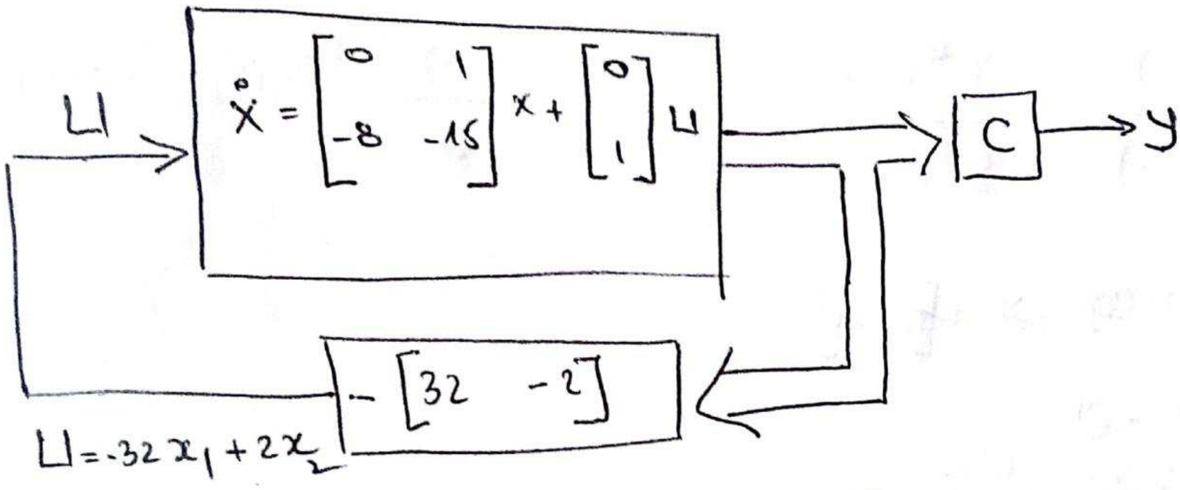
$$A - BK = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8-K_1 & -15-K_2 \end{bmatrix}}_{\hat{A}}$$

$$\det(\lambda I - \hat{A}) = 0$$

$$\lambda I - \hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8-K_1 & -15-K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 8+K_1 & \lambda+15+K_2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - \hat{A}| = \lambda^2 + (15+K_2)\lambda + 8 + K_1 = (\lambda+5)(\lambda+8) = \lambda^2 + 13\lambda + 40$$

$$\begin{cases} K_2 = -2 \\ K_1 = 32 \end{cases} \qquad \boxed{U = -32x_1 + 2x_2}$$



Exercice : soit un système linéaire caractérisé par une F.T suivante :

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)}$$

1- Trouver la représentation d'état sous la forme compagne de commande

2- Le système est-il stable

3- Etudier la commandabilité et l'observabilité

4- Déterminer la commande $U = V - Kx$ pour que les poles sont $-1 \pm j$

5- Trouver la représentation d'état sous la forme ~~observa~~ observable. et donnes le diagramme de simulation

Solution :

1- La représentation d'état sous la forme commandable :

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{S+2}{S^2-1} , \quad Z(S) = \frac{U(S)}{S^2-1} , \quad Y(S) = Z(S)\,[S+2]$$

~~$(S+2)U(S) = Y(S)[S^2-1]$~~

$\ddot{y} - y$

$$\begin{cases} Z(S) = \dfrac{U(S)}{S^2-1} \\ Y(S) = Z(S)\,[S+2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} U = \ddot{z} - z \\ y = \dot{z} + 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = \dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = U + x_1 \end{cases}$$

$$y = x_2 + 2x_1 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2- La stabilité : On trouve un pôle positif $\rightarrow$ syst instable

La Commandabilité

$$\varphi = [B \,\vdots\, AB]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

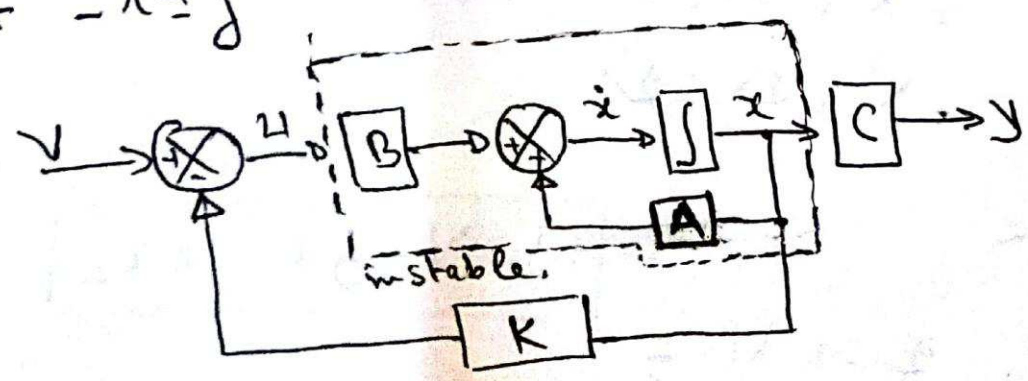
$\det \varphi = -1 \Rightarrow \text{rang}(\varphi) = 2 \Rightarrow$ système Controlable

L'observabilité:

$$\theta = \begin{bmatrix} C \\ \hline CA \end{bmatrix} \qquad CA = [2 \;\; 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \;\; 2]$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ $\det \theta = 3 \quad \text{rang}(\theta) = 2 \Rightarrow$ syst observable

- Determination la Cde $u = v - Kx$ pour que les pôles sont $-1 \pm j$



$$\det(\lambda I - A - BK) = (\lambda - 1 + j)(\lambda - 1 - j) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$A - Bk = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \ \ k_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - (A - Bk) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1+k_1 & \lambda + k_2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - (A - Bk)| = \lambda(\lambda + k_2) - [(-1)(-1+k_1)]$$

$$= \lambda^2 + \lambda k_2 - [1 - k_1]$$

$$= \lambda^2 + \lambda k_2 - 1 + k_1$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_2 = 2 \\ -1 + k_1 = 2 \Rightarrow k_1 = 3 \end{cases} \qquad \boxed{u = v - 3x_1 - 2x_2}$$

La forme observable :

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+2}{s^2-1}$$

$$s^2 y(s) - y(s) = u(s)\,s + 2u(s)$$
$$\ddot{y} - y = \dot{u} + 2u$$

$$\ddot{y} = \dot{u} + 2u + y$$

par integration

$$\dot{y} = u + \underbrace{\int 2u + y}_{x_2}$$

$$y = \underbrace{\int u + \int 2u + y}_{x_1}$$

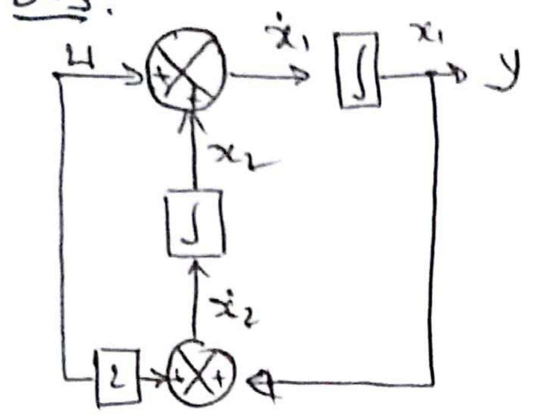
$$x_1 = \int u + x_2$$

$$x_2 = \int 2u + y = \int 2u + x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2u + x_1 \end{cases} \qquad y = x_1$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

D.S :



Commande par retour d'etat avec l'ajout d'action Integrale :

Exemple :

Soit le systême

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y = x_1$$

$$A-BK = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ K_1 & -K_2-1\end{bmatrix}$$

$$\det\left(\lambda I - (A-BK)\right) = (\lambda+2)\left[s+(K_2+1)\right] + K_1$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

Par identification

$\boxed{K_2 = -1}$ $\boxed{K_1 = 2}$ $u = V - 2x_1 + x_2$

Prise en considération l'action intégrale

$$x_R = \int e\,dt \qquad \dot{x}_R = V - x_1$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_R\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_R\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}V$$

$U = -K_1 x_1 - K_2 x_2 - K_R x_R + V$

$$A - BK = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -K_1 & -K_2 - 1 & K_R \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\lambda I - (A - BK)] = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & -1 & 0 \\ K_1 & \lambda + (K_2 + 1) & -K_R \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det[\lambda I - (A - BK)] = S^3 + (K_2 + 3) S^2 + [2(K_2 + 1) + K_1] S + K_R = 0$$

placement de pôle,

p. desiré : $S^3 + 3S^2 + 4S + 2$

$K_2 + 3 = 3 \Rightarrow \boxed{K_2 = 0}$

$\boxed{K_R = 2}$

$U = V - K_1 x_1 - K_R x_R$

$2 + K_1 = 4 \Rightarrow \boxed{K_1 = 2}$

$x_R = \int V - x_1$