Chapitre 3

Principe de maximum, valeurs propres

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Principe de maximum classique

Théorème 3.1. : *Soit $u \in C^2(\Omega)$, telle que $\Delta u \geq 0$ dans Ω. alors ; pour route boule ouverte $B(y,r) \Subset \Omega$, on a :*

$$\begin{aligned} u(y) &\geq \frac{1}{c_r}\int_{\partial B} u(x)d\sigma(x) \\ u(y) &\geq \frac{1}{c'_r}\int_{B} u(x)dx \end{aligned} \tag{3.1}$$

Théorème 3.2. (***Principe de maximum***) : *Soit $u \in C^2(\Omega)$, telle que $\Delta u \geq 0$ dans Ω.*

Supposons qu'il existe $x_0 \in \Omega$ telle que $u(x_0) = \max\limits_{x \in \Omega} u(x)$. Alors, u est une fonction constante.

Corollaire 3.1. : *Si u est une fonction harmonique atteint son maximum (minimum) dans Ω. alors, u est une fonction constante.*

Théorème 3.3. : *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. telle que $\Delta u \geq 0$ dans Ω. Alors :*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \qquad\qquad \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \tag{3.2}$$

Corollaire 3.2. : *Si u est une fonction harmonique, alors :*

$$\sup_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \inf_{\partial\Omega} u, \quad \forall x \in \Omega$$

Corollaire 3.3. : *Soient u, v deux fonctions telles que*

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v & \text{dans} \quad \Omega \\ u = v & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

alors : $u = v$ dans Ω.

Théorème 3.4. (***Inégalité de Harnack***) : *Soit u une fonction harmonique, positive, dans Ω. Alors ; il existe une constante positive C telle que :*

$$\sup_{\Omega} u \leq C \inf_{\Omega} u. \tag{3.3}$$

3.2 Principe de maximum faible et fort

Considérons l'opérateur L, défini comme suivant :

$$L = -\text{div}(a(x)\nabla u) + b(x).\nabla u + c(x)u \tag{3.4}$$

$a(x)$ est une matrice $n \times n$, telle que a_{ij} et de classe $C^0(\overline{\Omega})$,
$b(x)$ est une fonction vectorielle de classe $C^0(\overline{\Omega})$, borné sur $\overline{\Omega}$,
$c(x)$ est une fonction scalaire de classe $C^0(\overline{\Omega})$, borné sur $\overline{\Omega}$.

Définition 3.1. :

1. *On dit que L est elleptique dans Ω si a satisfait :*
$$\forall x \in \overline{\Omega}, \exists \lambda(x) > 0, \Lambda(x) > 0 : \quad \lambda(x)\|\xi\|^2 \leq a(x)\xi.\xi \leq \Lambda(x)\|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \tag{3.5}$$
2. *Si a satisfait (3.5), $\lambda(x) > \lambda_0 > 0$ (λ_0 constant), on dit que L est strictement elleptique dans Ω.*
3. *Si a satisfait (3.5), $\dfrac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}$ borné, on dit que L est uniformément elleptique dans Ω.*

Théorème 3.5. (***Principe de maximum faible***) : *Supposons que L est elliptique, telle que $c = 0$ dans Ω. Soit $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, satisfait :*

$$Lu \geq 0 \quad dans \quad \partial\Omega \tag{3.6}$$

Alors : $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u$ et $\inf\limits_{\Omega} u = \inf\limits_{\partial\Omega} u$.

Théorème 3.6. (***Principe de maximum fort***) : *Supposons que L est uniformément elliptique, telle que $c \leq 0$ dans Ω. Soit $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, une fonction positive satisfait :*

$$Lu \geq 0 \quad dans \quad \partial\Omega \tag{3.7}$$

Alors : si u atteint son maximum dans $\overline{\Omega}$ si et seulement si u est constante.

Corollaire 3.4. (***Comparaison***) : *Supposons que L est uniformément elliptique, telle que $c \leq 0$ dans Ω. Soit $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, satisfait :*

$$Lu \geq 0 \quad dans \quad \partial\Omega \tag{3.8}$$

Si $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$, alors : $u \leq 0$ dans Ω (plus précisement : $u < 0$ dans Ω ou $u \equiv 0$ dans Ω).

3.3 Valeurs propres

On va donner deux résultats : la première dans le cas unidimensionnelle, et la deuxième est dans des dimensions supérieures.

Théorème 3.7. *[2] Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $p \in C^1([a, b]), q \in C([a, b])$ avec $p > \alpha > 0$. Il existe une suite réelle $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ et une base Hilbertienne $(w_n)_{n\geq 0}$ de $L^2(]a, b[)$ telle que $w_n \in C^2([a, b])$ et on a :*

$$\begin{cases} -(pw_n')' + qw_n = \lambda w_n \quad dans \quad]a, b[, \\ w_n(a) = w_n(b) = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

λ_n sont les valeurs propres de l'opérateur différentielle $Au = (pu')' + qu$ avec les conditions de Dirichlet, et w_n sont les fonctions propres associées.

Maintenant, on va donner les valeurs propres de l'opérateur de Laplace.

Théorème 3.8. *[2] Il existe une suite strictement positive $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ et une base Hilbertienne $(w_n)_{n\geq 0}$ de $L^2(\Omega)$ telle que $w_n \in H_0^1\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ avec :*

$$-\Delta w_= \lambda w_n \quad dans \quad \Omega. \tag{3.10}$$

De plus, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$.

λ_n sont les valeurs propres de l'opérateur différentielle $-\Delta u$ avec les conditions de Dirichlet, et w_n sont les fonctions propres associées.

3.4 Exercices

Exercice 3.1. : *Soit* $u \in C([0,1]) \cap C^2(]0,1[)$, *telle que :* $u'' > 0$ *sur* $(0,1)$.
Montrer que $u < \max\{(u(0), u(1)\}$.

Exercice 3.2. : *Considérons le problème de Dirichlet suivant sur* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ *:*

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & dans \quad \Omega \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.11}$$

1. *Vérifier que* $u(x,y) = \dfrac{1 - (x^2 + y^2)}{4}$.
2. *Vérifier que le principe de maximum est satisfait.*

Exercice 3.3. : *Considérons le problème de Dirichlet suivant sur un ouvert borné* Ω *:*

$$\begin{cases} \Delta u = f & dans \quad \Omega \\ u = g & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.12}$$

Montrer que s'il existe une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *soluution du problème* (3.12), *elle est unique.*

Exercice 3.4. : *Considérons le problème de Dirichlet sur l'ouvert* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 4\}$ *:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & dans \quad \Omega \\ u = 1 & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

Conidérons les dux fonctions u_1, u_2, *définissent sur* Ω *par :* $u_1(x,y) = 1$, $u_2(x,y) = \dfrac{\ln\sqrt{x^2 - y^2}}{\ln 2}$

1. *Vérifier que* u_1, u_2 *sont des solutions du problème* (3.13).
2. *Conclure.*