Universitée de Msila

Facultée de Mathématiques et informatique — Département de Mathématiques

Master EDP et applications — 1ère année S_2 (2022 - 2023)

EDPs elliptiques linéaires (Devoir)

Problème : Soit Ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, $\phi \in C(\overline{\Omega})$ et g est une fonction appartienne à $H^1(\Omega)$ telle que $g \geq \varphi$. Soit la fonctionnelle G, définie sur $H^1(\Omega)$ par

$$G(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - 2\int_\Omega fu,$$

I) On considère le problème variationnel suivant :

$$u - g \in H_0^1(\Omega), \qquad G(u) = \min_{v-g\in H_0^1(\Omega)} G(v), \tag{1}$$

1. Montrer que si u est une solution de (1), alors :

$$G(u + t\psi) \geq G(u), \forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega), \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. En déduit que : $\forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega \nabla u.\nabla \psi dx - \int_\Omega f\psi dx = 0.$
3. Montrer que, si $u \in H^2(\Omega)$ on a :

$$\begin{cases} \Delta u + f = 0 & : \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega), \\ u = g & : \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

II) Soit l'ensemble $K = \{u \in H^1(\Omega) : u - g \in H_0^1(\Omega), u \geq \varphi \, ppt\}$.
On considère le problème variationnel suivant :

$$u \in K, \qquad G(u) = \min_{v\in K} G(v), \tag{2}$$

1. Montrer que K est un ensemble convexe, fermé de $H^1(\Omega)$.
2. Montrer que si u est une solution de (2), alors :

$$G(u + t(v-u)) \geq G(u), \forall v \in K, \forall t \in]0, 1[.$$

3. En déduit que : $\forall v \in K : \displaystyle\int_\Omega \nabla u.\nabla(v-u)dx \geq \int_\Omega f(v-u)dx.$

4. Montrer que, si $u \in H^2(\Omega)$ alors : $\Delta u + f \leq 0$.
5. Supposons que u est continue, et soit $N = \{x \in \Omega : u(x) > \phi(x)\}$.
   Montrer que $\Delta u + f \leq 0$ dans N.
6. En déduire que u est une solution dans $H^2(\Omega) \cup C(\Omega)$ du problème :

$$\begin{cases} \Delta u + f \leq 0 & : \text{ ppt dans}\, \Omega, \\ u \geq \phi & : \text{ ppt dans}\, \Omega, \\ (\Delta u + f)(u - \phi) = 0 & : \text{ ppt dans}\, \mathscr{D}'(\Omega), \\ u = g & : \text{ sur}\, \partial\Omega. \end{cases}$$

Inégalité de Poincaré-Friedrichs : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, connexe tel que $\Gamma = \partial\Omega$ est de classe C^1. On va montrer la propriété suivante : pour tout $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \int_\Gamma u^2 d\sigma(x) \geq \beta \|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{3}$$

On va démontrer cette propriété par l'absurde. Choisissons $\beta = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Supposons qu'il existe une suite $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ telle que $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et

$$\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \int_\Gamma u_n^2 d\sigma(x) \leq \frac{1}{n} \|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{4}$$

1. Pourquoi la condition $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ ne change pas la généralité de la preuve ?
2. Montrer que (u_n) est bornée dans $H^1(\Omega)$.
3. En utilisant le théorème de Rellich, montrer qu'il existe une sous-suite (u_{nk}) de la suite (u_n), converge vers une fonction $v \in L^2(\Omega)$.
4. Montrer que la suite (∇u_{nk}) converge vers 0 dans $(L^2(\Omega))^n$.
5. En déduire la valeur de ∇u.
6. En passant à la limite dans (4), montrer qu'il y a une contradiction.