1er Chapitre

Les erreurs numériques

Important :

« Un résultat numérique approché n'a de sens que s'il est accompagné d'une estimation de l'erreur commise entre le résultat exact et approché, sans cela il ne veut rien dire »

1) Définitions

Définition 1 :

Soit x un nombre donné et x* une valeur approchée de celui-ci. On définit l'erreur absolue notée $\Delta(x)$ par :

$$\Delta(x) = |x - x^*|$$

Remarque 2 : En pratique il est impossible d'évaluer l'erreur absolue car x est souvent inconnu par conséquent, on introduit la notion de la borne supérieure de cette erreur notée Δx et on a :

$\Delta(x) = |x - x^*| \leq \Delta x$

Ce qui permet d'écrire : $x = x^* \pm \Delta x$

Définition 2 :

On appelle erreur relative le nombre $r(x)$ défini par :

$$r(x) = \frac{|x - x^*|}{|x^*|} = \frac{\Delta x}{|x^*|}$$

L'erreur relative est souvent exprimée en pourcentage (cela veut dire que l'erreur commise représente une proportion de $r(x)$ % de la valeur estimée).

2) Représentation décimale d'un nombre approché :

Tout nombre positif x* peut se mettre sous la forme :

$$x^* = \alpha_m.10^m + \alpha_{m-1}.10^{m-1} + \ldots\ldots..\alpha_{m-n+1}.10^{m-n+1}\ldots\ldots\ldots.(*).$$

$$\alpha_m \neq 0 \text{ et } \alpha_i \in \{0,1,2.....9\} \quad i \neq m$$

Exemple : $13{,}102 = 1.10^1 + 3.10^0 + 1.10^{-1} + 0.10^{-2} + 2.10^{-3}$

$0.0012 = 1.10^{-3} + 2.10^{-4}$

Remarque : Les chiffres $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots \quad \alpha_{m-n+1}\ldots\ldots$ donnés par la représentation décimale (*) sont appelés chiffres significatifs. (Autrement dit, on appelle chiffre significatif d'un nombre tout chiffre de sa représentation exceptés les zéros situés devant le 1er chiffre non nul .)

3) chiffres significatifs exacts d'un nombre approché

On dit que les n premiers chiffres d'un nombre approché x* sont exacts si :

$$\Delta x \leq 0.5\ 10^{m-n+1}$$

Où m est le 1er exposant de 10 dans la formule (*)

3) Arrondissement d'un nombre approché :

L'arrondissement est un processus qui consiste à tronquer les nombres pour n'en garder que le nombre de chiffres significatifs exacts.

3-1) Règles d'arrondissement :

*) Si le 1er chiffre à rejeter est < 5, le nombre est retenu.

**) Si le 1er chiffre à rejeter est ≥ 5, on ajoute une unité au dernier chiffre significatif retenu

3-2) L'erreur d'arrondi : Elle vérifie l'estimation suivante :

$$\Delta r \leq 0.5\ 10^{m-n+1}$$

3-3)Résultat final : s'écrit sous forme :

$$x = x * arrondi \pm (2\Delta x)$$

4) Formule générale de l'erreur :

Soit $f : IR^n \rightarrow IR$

$$(x_1, \ldots.x_n) \rightarrow f(x_1, \ldots.x_n).$$

Alors : $$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial xi}\right| \Delta xi$$

Et $rf = \frac{\Delta f}{|f|}$

Exemple d'application : (Cet exemple nous permet de mieux comprendre les notions ci-dessus) :

Soit $x = 0{,}1256$ donné avec une erreur de 0,5%.

1) Donner l'erreur absolue de x.
2) Déterminer le nombre de chiffres significatifs exacts de ce nombre.
3) Arrondir le résultat au dernier c.s.e.

Solution :

1) On a : $x = 0{,}1256$ *et r(x)=0.005 d'où :* $\Delta x = r(x).|x| = 0{,}000628 \leq 0.5.10^{-3}$

2) Comme $\Delta x \leq 0.5\ 10^{m-n+1}$ donc : m-n+1=-3 avec m=-1 alors : n=3.

Donc le nombre x a trois chiffres significatifs exacts.

3) Le 1er chiffre à rejeter est égal à 6 donc x arrondi noté par x_a est égal à 0,126

Par le résultat final s'écrit : $x = x_a \pm 2\Delta x = 0{,}126 \pm 10^{-3}$