Chapitre 2

Résolution des équations non linéaires dans *IR*.

Introduction :

On présente ici quelques méthodes de résolution numériques des équations *F (x)=0*

Soit *F* : $IR \rightarrow IR$ une application continue.

On se propose de déterminer la ou les solutions de F (x)=0 ou F est un polynôme de deg ≥ 3 ou l'expression de F est complexe.

Les méthodes classiques de Résolution ne permettent pas de résoudre de tels problèmes. On fait donc appel aux techniques des méthodes numériques.

Pour cela on procède de la manière suivante :

1) Localisation des racines :

La plupart des méthodes numériques nécessite la détermination d'un intervalle [a, b] contenant une seule racine dite racine séparée α de $F(x) = 0$.

« On dit alors qu'elle est localisée ou séparée des autres éventuelles racines. »

1-1) Les méthodes de séparation :

*) L'étude des variations de F, puis l'utilisation du théorème de la valeur intermédiaire.

**) La réécriture de F sous forme $F_1(x) = F_2(x)$, puis la recherches des points d'intersection entre F_1 et F_2.

Exemple 1 : Séparer les racines des équations :

a) $F(x) = x^3 - 3x + 1$

$F(x)=0$ admet (03) racines s_1, s_2 et s_3 (On a utilise le tableau de variations de F(x) dans IR)

En observant le tableau de variation, on remarque facilement que :

$s_1 \in [-3,-1]$, $s_2 \in [-1, 1]$ et $s_3 \in [1, 3]$

b) $F(x) = e^x \sin x - 1 = 0$ dans $[-\pi, \pi]$

$F(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \sin x$.

Les points d'intersection des deux fonctions e^{-x} *et* $\sin x$ *tracées dans le même repère sont* s_1 et s_2, $s_1 \in [0, \pi/2]$, $s_2 \in [\pi/2, \pi]$ ce qui veut dire que s_1 et s_2, sont les racines de $F(x) = 0$

Remarque : On suppose dans la suite que F est continue et que la racine α est localisée (séparée) dans un intervalle [a, b].

2) Les méthodes utilisées :

2-1) Méthode de la Dichotomie :

L'idée : est de construire une suite d'intervalles de plus en plus petits contenants une racine séparée de $F(x) = 0$.

2-1-1) Algorithme de la méthode :

$F(x)=0$, α une racine séparée de $F(x) = 0$ dans [a, b]

On pose $[a, b] = [a_0 , b_0]$.

On divise l'intervalle $[a_0 , b_0]$ en deux avec $x_0=\frac{a_0+b_0}{2}$

- Si $F(a_0)\,F(x_0) <0$ alors $[a_0, x_0] = [a_1, b_1]=I_1$

Sinon $I_1 =[x_0, b_0]$.

Et ainsi de suite, on construit la suite d'intervalles $I_n=[a_n,b_n]$ et donc :

$$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$$

Et on continue avec le même principe pour localiser la racine α :

- Si $F(a_n)\,F(x_n) <0$ alors $[a_n,x_n]=[a_{n+1},b_{n+1}]=I_{n+1}$.

  Sinon: $[x_n, b_n]= [a_{n+1},b_{n+1}]=I_{n+1}$

Et on prend comme approximation de α la valeur x_n en utilisant n itérations.

Plus loin, on verra comment déterminer le nombre d'itérations nécessaire n en se donnant un erreur d'approximation ϵ telle que : $|x_n-\alpha|\le\varepsilon$

2-1-2) Test d'arrêt:

$$b_{n+1} - a_{n+1}=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} =.....=\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}.$$

D'où :

Si a est racine de $F(x)=0$, on aura : $|x_n-\alpha| \le \frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$ (*)

Remarque :

R1) si on désire calculer une approximation de a avec k chiffres significatifs exacts, il suffit :

$|x_n - \alpha| \leq 0.5.10^{m-k+1}$

R2) si on veut calculer une approximation de a avec k décimales

Il suffit que : $|x_n - \alpha| \leq 0.5\ 10^{-k}$

R 3) Si on désire on calculer le nombre d'itérations suffisant n pour approcher α à ε prés, on procède comme suit :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{\ln(\frac{b-a}{2\varepsilon})}{\ln(2)}$$

Il suffit de prendre $n=[\frac{\ln(\frac{b-a}{2\varepsilon})}{\ln(2)}]+1$

2-1-3) Exercice d'application sur la Dichotomie (A traiter en TD):

On considère l'équation :

F (x) =x^4*-3x+1=0*

1) Montrer que l'équation F(x)=0 admet une racine unique dans [0.3, 0.4]

2) Calculer une valeur approchée de cette racine par la méthode de la Dichotomie avec une précision $\varepsilon = 0.5*10^{-2}$

3) Arrondir le résultat au nombre de chiffres significatifs exacts.

Solution : *n=4* $x_n = 0.34 \pm 0.01$

Remarques :

1)**-** Si *F (a) F (b)* **<***0*, l'équation *F (x)=0* admet au moins une solution dans [a, b]

2)- Si *F (a) F (b)>0*, l'équation *F (x)=0* n'admet pas de solutions ou bien un nombre pair de solutions

2-2) Méthode du point fixe :

Définition du point fixe :

Soit $\varphi(x)$ une fonction continue sur un intervalle [a,b]

On dit que x* est un point fixe de φ sur $[a,b]$ si $\varphi(x^*) = x^*$

Exemple **:**

*) $\varphi(x)=x^2$ admet deux points fixe dans IR

car $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$

Remarque : $\varphi(x)$ admet un unique point fixe dans [-2,$\frac{1}{2}$] et un autre unique dans [$\frac{1}{2}$, 2] .

*) $\varphi(x) = x^2 + 1$ n'a aucun point fixe dans IR.

Théorème du point fixe :

Soit à résoudre l'équation F(x)=0 sur [a,b]

On considère φ une fonction définie sur *[a, b]* telle que :

i) F(x)=0 $\Leftrightarrow \varphi(x) = x$

ii) $\forall x \in$ *[a, b]* ; $\varphi(x) \in$ *[a, b]*

Autrement dit : φ est sable dans *[a, b]*.

iii) φ est contractante i.e. :Il existe une constante k $\in]0,1[$ (k < 1)

Telle que : $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq k|x-y|$. $\forall x, y \in$ *[a, b]* .

Alors la fonction $\varphi(x)$ admet un point fixe unique $\alpha \in$ *[a, b]* vérifiant F(a)=0.

a est limite de la suite (x_n) définie par : $\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_1 = \varphi(x_0) \\ \quad . \\ x_n = \varphi(x_{n-1}) \end{cases}$

Et on a l'estimation suivante :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa}|x_1 - x_0|$$

Remarque:

-la solution α s'appelle point fixe de φ

-Il est souvent difficile de vérifier la contraction de φ sur [a,b] d'où :

Si φ est dérivable sur [a, b] et sup | φ (x) | = κ <1 sur [a,b] $\Rightarrow$ alors la condition iii) est vérifiée.

Preuve : On montre l'existence et l'unicité de la solution :

1) **L'existence :**
$\varphi(x) = x \Leftrightarrow$ F(x)= $\varphi(x) - x = 0$

F (a) = $\varphi(a)-a \in$ [a, b] $\Rightarrow$ $\varphi(a)-a \geq 0$

F(b) = $\varphi(b)-b$ $\in$ [a, b] $\Rightarrow$ $\varphi(b)-b \leq 0$. (grâce à la condition ii)

F(a).F(b)<0 d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution

α $\in$ [a, b] telle que : F(α)=0 $\Leftrightarrow$ $\varphi(\alpha)=\alpha$

2) <u>Unicité :</u>

Supposant qu'il existe deux solutions s_1, s_2 et $s_1 \neq s_2$ de l'équation $\varphi(x)=x$

Alors :

$|s_1-s_2|=|\varphi(s_1)-\varphi(s_2)| \leq \kappa|s_1-s_2|$

Ce qui implique :

(1-k) $|s_1-s_2| \leq 0$ ce qui est impossible car (0<κ<1).

3) convergence :

$\lim_n |x_n - \alpha| \leq \frac{\lim_n \kappa^n}{1-k}|x_1-x_0| = 0$ car 0<k<1 $\Rightarrow x_n \rightarrow$ quand $n \rightarrow \infty$

<u>Comment applique –t- on la méthode du point fixe pour résoudre F(x)=0</u> ?

1)- On détermine l'intervalle [a, b] qui contient une racine séparée de F(x)=0

2)- On définit une fonction φ sur [a, b] qui vérifie les conditions du théorème du point fixe sur [a, b] telle que :

F(x)=0 $\Leftrightarrow$ $\varphi(x)=x$

3)- On détermine alors notre suite (x_n) comme suit :

On choisit un $x_0 \in$ [a, b] quelconque tel que : $x_1=\varphi(x_0)$; $x_2=\varphi(x_3)$;……. ; $x_n=\varphi(x_{n-1})$

$Lim_{n\rightarrow\infty}(x_n)=\varphi(Lim_{n\rightarrow\infty}(x_{n+1}))=\varphi(\alpha)=\alpha$ car φ est continue

4) - On définit un critère d'arrêt ou , on calcule le nombre d'itérations n suffisant pour avoir une valeur approchée x* de α a ε prés avec le même Principe que la dichotomie.

C'est à dire:

$$|x_n-\alpha| \le \frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0| < \varepsilon \Rightarrow k^n < \frac{\varepsilon(1-k)}{x_1-x_0}$$

En posant : A= ln $\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{x_1-x_0}\right)$

On obtient : n= $\left[{}^{A}/_{\ln(k)}\right]$+1

Interprétation géométrique de la méthode du point fixe :

Soit le problème $f(x)-x=0 \Leftrightarrow f(x)=x$ (f est une fonction définie sur un intervalle I)

*) Si $|f'(x)|<1$ la suite $(x_n)_n$ converge (fig.(2) et fig.(3)).

*) Si $|f'(x)|>1$ la suite $(x_n)_n$ diverge (fig.(1)).

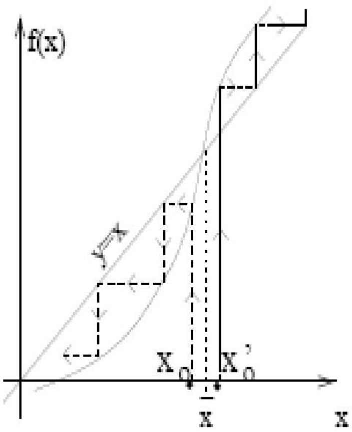

fig. 1

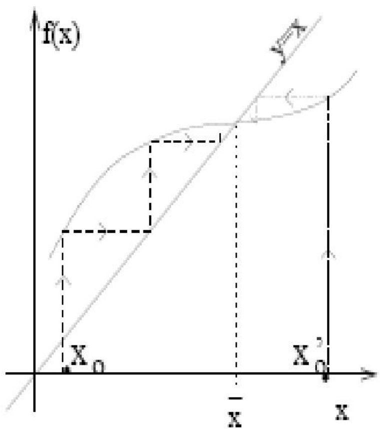

fig. 2

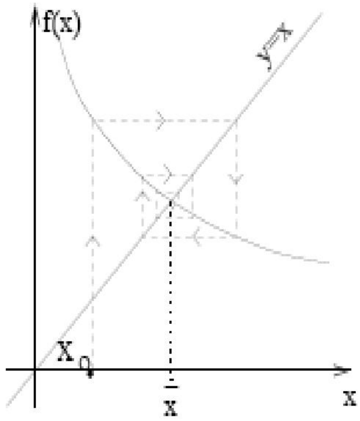

fig. 3

2-3) Méthode de Newton (méthodes des tangentes):

Notons par α la racine " exacte" cherchée et x_n une valeur approchée de α

On suppose que F est de classe C^2 au voisinage de α (deux fois continument dérivable au voisinage de α)

Le développement de Taylor d'ordre deux de F nous donne :

$$F(\alpha) = F(x_n) + F'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{F''(x_n)}{2}(\alpha - x_n)^2$$

Et comme $F(\alpha) = 0$, en supposant que $F'(x_n) \neq 0$, on aura :

$$\alpha = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} - \frac{F''(x_n)}{2F'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$$

En négligeant le reste R=$-\frac{F''(x_n)}{2F'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$, la quantité $x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$ qu'on notera x_{n+1} constitue alors une valeur approchée de α . Et la formule de récurrence de Newton est donnée par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \qquad n = 0,1,2,\ldots..$$

2-3-1) Interprétation géométrique de la méthode de Newton :

Soit F une fonction de classe C² ([a,b]) . Considérons le cas où : F ''≥ 0 et F(b) > 0 ,

F(a) F(b)≤ 0 .

L'équation de la tangente à la courbe de F au point $(x_0, F(x_0))$ est donnée par :

$$y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$$

*) On prend $x_0 = b$.

Le point d'intersection de cette droite tangente avec l'axe x'ox a pour abscisse [fig. 4] :

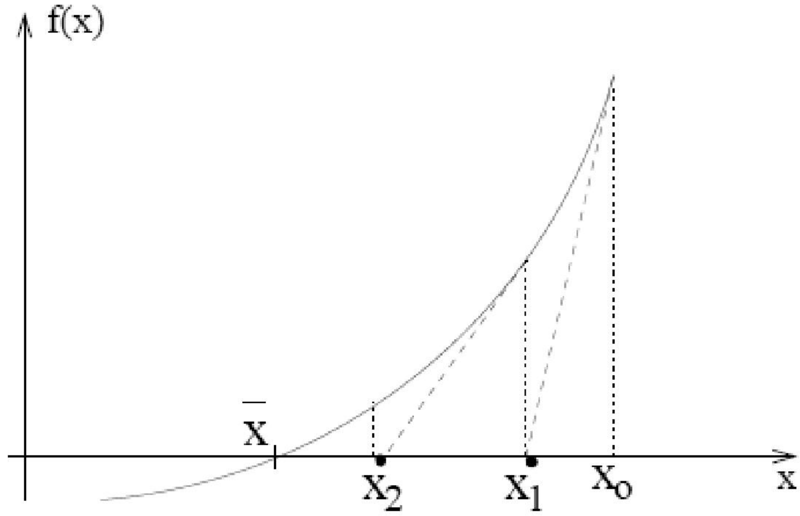

fig. 4

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

x_1 constitue une première approximation de $\alpha = \bar{x}$.

De la même manière on obtient x_2 , $\ldots\ldots x_n$ avec :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \qquad n = 0,1,2,\ldots..$$

D'après le graphe cette suite converge vers $\alpha = \bar{x}$. Dans ce cas $x_0 = b$ vérifie la condition

$$F''(x_0).F(x_0) \geq 0 .$$

*) Si on prend $x_0 = a$: on a $F''(x_0).F(x_0) \leq 0$ alors la droite tangente passant par le point $(a, F(a))$ coupe l'axe des x en dehors de [a,b] (l'intervalle dont se trouve la solution exacte) , on s'éloignera donc , de la racine exacte α.

<u>Remarque</u> :

Une méthode itérative n'est importante que si elle est convergente .

On présente alors le théorème de convergence suivant :

Théorème :

Soit F une fonction de classe $C^2([a,b])$ vérifiant les conditions suivantes :

i) F(a).F(b) <0

ii) $F'(x_n) \neq 0$ sur [a,b]

iii) $F''(x_n)$ garde un signe constant sur [a,b]

Alors, pour un choix de x_0 tel que F'' (x_0).F (x_0)≥ 0 , la suite :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \qquad n = 0,1,2,\dots$$

converge vers l'unique solution de F(x)=0

Et on a l'estimation d'erreurs suivante :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M}{2m} |x_{n-1} - x_n|^2$$

Où : $M = \sup_{[a,b]} |F''(x)|$ et $m = \inf_{[a,b]} |F'(x)|$

Remarques :

R1 **:** Les conditions i) et ii) assurent l'existence et l'unicité de la solution.

R2 : **La** condition iii) montre que la fonction considérée ne change pas de concavité sur [a,b] .

R3 : Ce théorème assure la convergence dans un voisinage de x_0 .

Exemple d'application :

Soit la fonction : $F(x) = x^3 + x - 1$

1) Cette fonction admet une racine séparée sur $[\frac{1}{2}, 1]$ car :

$$\begin{cases} F\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}375 \\ F(1) = 1 \end{cases} \qquad \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

et

$$F' > 0 \ sur \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Vérifions maintenant les conditions du théorème de Newton :

La condition i) déjà vue dans 1) .

ii) $F'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0 \; sur \; \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$iii) \; F''(x) = 6x > 0 \; sur \; \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Le choix de x_0.

$F''(x) > 0 \; et \; F(1) > 0 \; \Rightarrow \; F''(1).F(1) > 0 \Rightarrow x_0 = 1$

$sup|F''(x)| = 6 \;\; sur \; \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$Inf\,|F'(x)| = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}. \; sur \; \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

On calcule une approximation avec une précision $\varepsilon = 10^{-2}$

Partant du choix de $x_0 = 1, \;\; on \; a \;\; : x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = 0{,}64.$

$$|x_1 - \alpha| \leq \frac{M}{2m}|x_1 - x_0|^2 = \frac{6 \times 4}{2 \times 7}|x_1 - x_0|^2 \approx 0{,}22 > \varepsilon.$$

On calcule alors x_2.

$x_2 = 0{,}67$

$|x_2 - \alpha| \leq 1{,}71.\,|x_1 - x_0|^2 \approx 0{,}0015 < 0{,}5.\,10^{-2} = \varepsilon$

$d'où \; x_2$ est la valeur approchée de α à $0{,}5.\,10^{-2}$.

Estimation :

$\begin{cases} \mathrm{m - n + 1 = -2} \\ \mathrm{m = -1} \end{cases} \Rightarrow$ n=2   Le nombre a deux chiffres significatifs exacts.

$$\boxed{\alpha = 0{,}67 \pm 0{,}01}$$

2-4) Méthode de Régula-Falsi

Dans la méthode de Newton, le calcul de $F'(x)$ peut être complexe ou impossible. On remplacera alors cette dérivée par son approximation :

$$F'(x) = \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

D'où la méthode de régula-Falsi :

$$\begin{cases} x_0 \; et \; x_1 \; données, \;\; n = 1, 2, \dots \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n \cdot F(x_{n-1}) - x_{n-1} \cdot F(x_n)}{F(x_{n-1}) - F(x_n)} \end{cases}$$

La méthode de Régula-Falsi est plus facile par rapport à la méthode de Newton, car elle n'exige qu'une seule évaluation de la fonction (celle de $F(x_n)$), $(F(x_{n-1})$ est calculée dans l'itération précédente). Par contre, Newton exige deux: $F(x_n)$ et $(F'(x_n))$

3) La méthode de Newton et les Polynômes (Théorème de STURM)

On suppose que F est un polynôme P_n de degré n n'ayant que des racines distinctes.

$$F(x) = P_n(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

- Comment séparer les racines de ce polynôme ?

Définition : On appelle suite de Sturm, la suite définie par :

$$S_0(x) = P_n(x)$$

$$S_1(x) = P_n'(x)$$

$$S_2(x) = -Reste\left(\frac{S_0(x)}{S_1(x)}\right)$$

..

$$S_i(x) = -Reste\left(\frac{S_{i-2}(x)}{S_{i-1}(x)}\right)$$

$$S_n(x) = -Reste\left(\frac{S_{n-2}(x)}{S_{n-1}(x)}\right)$$

(Les polynômes de Sturm sont donnés à un coefficient près).

Théorème de Sturm 1 : (Nombre de racines réelles)

Le nombre de racines réelles (qui sont supposées simples) de l'équation : $P_n(x) = 0$ est égal à :

$N(a) - N(b)$ où $N(\xi),\ \xi = a\ ou\ b$ est le nombre de changement de signe de la suite $S_i(x)$.

Les réelles a et b sont les extrémités de l'intervalle contenant les racines.

Théorème 2 :

Les racines réelles de l'équation : $P_n(x) = 0$ se trouvent dans]-T, T [avec :

$$T = \frac{1}{|a_0|}\left[\max_{i=1,..n} |a_i|\right]$$

Cas des racines multiples :

Propriétés : s'il existe j tel que $S_{j+1} = 0$, alors les racines multiples de $P_n(x)$ sont les racines simples de $S_j(x)$.

Remarque : La divergence de la méthode de Newton dans le cas des polynômes est due à deux raisons :

-soit au mauvais choix de x_0.

-soit qu'on n'a pas de racines réelles.

Exemples d'application (degré 3) :

$F(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$

1) On détermine l'intervalle dont se trouvent les racines de $F(x) = 0$ si elles existent.

   $T = \frac{1}{|a_0|}\left[\max_{i=1,3} |a_i|\right] = 1 + \frac{1}{1}.|3| = 4.$

   $d'où \;\; I =]-4, 4[.$

2) On cherche le nombre de racines : pour cela, on considère la suite de Sturm associée au polynôme $P_3(x)$.

$S_0(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

$S_1(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$S_2(x) = -Reste\left(\frac{S_0(x)}{S_1(x)}\right) = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} = \frac{4}{3}(x+2), \qquad On\,prend : S_2(x) \equiv (x+2)$

$S_3(x) = -Reste\left(\frac{S_1(x)}{S_2(x)}\right) = -Reste\left(\frac{(3x^2-6x+1)}{x+2}\right)$ =-25

En prenant les valeurs de cette suite pour -4 , 4 et 0 , on peut dresser le tableau suivant :

x	S_0	S_1	S_2	S_3	N
-4	-	+	-	-	2
0	-	+	+	-	2
4	+	+	+	-	1

Le nombre de racines réelles de l'équation considérée $= N(-4) - N(4) = 1.$

Localisation des racines :

$N(-4) - N(0) = 2 - 2 = 0$ Pas de racines dans [-4,0]

$N(0) - N(4) = 1$ La racine réelle se trouve dans [0, 4] ($P_3(0) = -3$ *et* $P_3(4 > 0)$.

A ce moment : On applique la méthode de Newton pour approcher cette racine.

$F' = 3x^2 - 6x + 1 > 0$ sur $[2,4]$.

$F'' > 0$ *sur* $[2,4]$.

$$x_0 = 4, \qquad x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = 3{,}32.$$

x_2=3,05, x_3=3,002. …. On remarque que cette suite converge vers la racine $\bar{x}$=3.

Cas des racines multiples :

$P_4(x) = F(x) = 4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

$S_0(x) = F(x)$

$S_1(x) = 16x^3 - 12x^2 - 6x + 4 \equiv 8x^3 - 6x^2 - 3x + 2$

$$S_2(x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{21}{8}x + \frac{3}{4} \equiv 6x^2 - 7x + 2.$$

$$S_3(x) = \frac{16}{9}x - \frac{8}{9} \equiv 2x - 1$$

$S_4(x) = 0$

Il existe donc des racines multiples qui sont racines de $S_3(x)$, soit $x = \frac{1}{2}$.

L'intervalle où se trouvent les racines est :

$$T = \frac{1}{|a_0|}\left[\max_{i=1,4}|a_i|\right] = 1 + \frac{1}{4}.|4| = 2.$$

$$\Rightarrow I =]-2,2[$$

Pour la localisation, prenez les valeurs de la suite de Sturm pour -2, 0 et 2.

x	S_0	S_1	S_2	S_3	N
-2	+	-	+	-	3
0	-	+	+	-	2
2	+	+	+	+	0

Comme $N(-2) - N(2) = 3$ alors, il existe trois racines réelles distinctes.

La racine $\frac{1}{2}$ est donc double.

$N(-2) - N(0) = 3 - 2 = 1$, l'une des racines se trouve dans [-2,0].