

- b) $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- c) $(AB)^t = B^t A^t$.
- 4) Une matrice A est dite régulière si son déterminant est différent de zéro.
- 5) Si A et B sont deux matrices régulières telles que : $A \cdot B = B \cdot A = I$ alors B est dite inverse de A et $B = A^{-1}$.
- 6) Valeur absolue de A : $|A| = (|a_{j,i}|)$, $|a_{j,i}|$ sont les modules des éléments de A.
- 7) Si A et B sont deux matrices carrées, il vient :
- a) $|A + B| \leq |A| + |B|$
- b) $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$
- c) $|kA| = |k| \cdot |A|$ k est un nombre quelconque.
- 8) En particulier : $|A^p| \leq |A|^p$ p est un nombre naturel.
- 9) Norme d'une matrice A : c'est le nombre réel $\|A\|$ qui satisfait aux conditions suivantes :
- a) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
- b) $\|kA\| = |k| \cdot \|A\|$.
- c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- d) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
- e) Pour A carrée, on a : $\|A^p\| = \|A\|^p$

En pratique, on utilise les normes canoniques (facilement calculables) :

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\rho(A \cdot A^t)}$$

Où $\rho(A)$ est appelé rayon spectral de A .

La résolution du système précédent ($A \cdot x = b$) peut s'effectuer par plusieurs méthodes :

- Une méthode classique (Cramer).
- Les méthodes directes.
- Les méthodes itératives.

1) Méthode de Cramer : Cette méthode repose sur les déterminants. Si $\det A \neq 0$ alors le système $A \cdot x = b$ admet une solution unique x donnée par : $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ Où A_i est la matrice obtenue en remplaçant, dans A , la $i^{\text{ème}}$ colonne par b .

Numériquement : on calcule : $\det A_i, \det A$ et $\frac{\det A_i}{\det A}$.

Pour $n=10$, Cramer nécessite $3 \cdot 10^9$ opérations (beaucoup plus de n^4).

- Notre objectif : est de faire appel à des méthodes numériques ayant des temps de calcul acceptables (le nombre ne dépasse pas n^3).

2) Méthodes directes :

Une méthode est dite directe, si elle donne au bout d'un nombre fini d'opérations (acceptable) une solution exacte du problème.

Remarque : cette méthode est utilisée généralement lorsque $n \leq 100 \rightarrow$ matrice pleine.

2-1) Méthode de Gauss-Jordan :

Soit le système linéaire $A \cdot x = b$ où A est une matrice régulière ($\det A \neq 0$).

Principe : Transformation de la matrice A en une matrice identité.

i.e: $[A: B] \xrightarrow{\text{transformation}} [I: b']$ où $I =$ identité.

D'où : $A \cdot x = b \quad I \cdot x = b' \quad x = b'$

Etapes : on pose $A = A^{(1)}$ et $b = b^{(1)}$.

1^{ère} Etape :

$$[A : b] = [A^{(1)} : b^{(1)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \cdot & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & \cdot & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & \cdot & b_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ \cdot \\ L_n^{(1)} \end{matrix}$$

On suppose que $a_{11}^{(1)} \neq 0$ (pivot de la première étape) et on fait les opérations suivantes :

$$L_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$$

$$L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} \cdot L_1^{(2)} ; i = 2, \dots, n$$

On obtient:

$$[A^{(2)}; b^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & \cdot & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & \cdot & b_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & \cdot & b_n^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ \vdots \\ L_n^{(2)} \end{matrix}$$

Avec:

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = \frac{a_{1j}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, & j = 1, \dots, n. \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i1}^{(1)} \cdot a_{1j}^{(2)}, & i = 2, \dots, n \text{ et } j = 2, \dots, n \\ a_{i1}^{(2)} = 0, & i = 2, \dots, n \end{cases}$$

$$\text{Et : } \begin{cases} b_1^{(2)} = \frac{b_1^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} \cdot b_1^{(2)}, & i = 2, \dots, n \end{cases}$$

k^{ème} Etape

$$a_{kk}^{(k)} \neq 0$$

$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \text{ (ligne du pivot)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} \cdot L_k^{(k+1)}, & i = 1, \dots, n \text{ avec } i \neq k. \end{cases}$$

$$\text{Et } \begin{cases} a_{kj}^{(k+1)} = \frac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} \cdot a_{kj}^{(k+1)}, & i = 1, \dots, n ; i \neq k \text{ et } j = k + 1, \dots, n. \end{cases}$$

A la dernière étape, on obtient :

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow I \cdot x = b^{(n)} \text{ Où : } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b^{(n)} = b_i^{(n)} \quad 1 \leq i \leq n$$

Méthode pratique : On normalise d'abord la ligne du pivot puis, on passe à la réduction.

Exemple :

Soit à résoudre le système $A \cdot x = b$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ Par la méthode de Gauss-Jordan (Sera traité en détail en TD)}$$

Remarques sur la méthode de Gauss-Jordan

- 1) Le passage de la matrice $[A;b]$ en une matrice $[I;b']$ où $x=b'$ nécessite n^3 opérations.
- 2) Elle est aussi conseillée pour inverser une matrice : il suffit d'effectuer les opérations précédentes sur le système $(A:I)$ pour avoir $(I:A^{-1})$.

2-2) Méthode de Gauss ordinaire

Soit A une matrice d'ordre n régulière.

Principe : Transformation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieure. Pour cela, on construit $[A:b]$ et

$[A:B] \xrightarrow{\text{transformation}} [A^{(n)}; b^{(n)}]$ Où $A^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure.

$$t. e: [A : b] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \cdot & b_1^{(1)} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & \cdot & b_n^{(1)} \end{bmatrix} \rightarrow [A^{(n)}; b^{(n)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & \dots & a_{1n}^{(n)} & \cdot & b_1^{(n)} \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} & \cdot & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Puis, on résout le système $A^{(n)}.x = b^{(n)}$ dont x est la solution exacte du système $A.x = b$.

On procède de la manière suivante :

Etapes : On pose $A = A^{(1)}, b = b^{(1)}$

Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ on fait les opérations suivantes :

$$L_1 \text{ est maintenue} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$[A^{(2)}; b^{(2)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots \\ 0 & \cdot & \dots \\ 0 & \cdot & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots \end{bmatrix}$$

Et ainsi de suite ;

A la $k^{ème}$ étape, on effectue les opérations suivantes :

$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} = L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \end{cases}$$

Résolution de $A^{(n)}.x = b^{(n)}$

$$A.x = b \quad A^{(n)}.x = b^{(n)} \quad \begin{cases} a_{11}^{(n)} x_1 + \dots = b_1^{(n)} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

On commence par déterminer x_n , puis x_{n-1}, \dots (résolution par retour en arrière).

Remarque :

- 1) La méthode de Gauss nécessite $\frac{2}{3}n^3$ opérations. (Cramer nécessite $(n+1)^2 n!$ opérations) pour résoudre un système d'ordre n .
- 2) Si l'un des pivots est nul, on permute la ligne du pivot avec une ligne supérieure.
- 3) $\det A = (-1)^p \prod a_{kk}^{(k)}$. p est le nombre de permutation de lignes. (Dans le cas de Gauss ordinaire $p=0$).

3) Décomposition de A en L.U :

Soit à résoudre le système $A \cdot x = b \dots (1)$.

Principe : mettre la matrice A sous forme L.U.

Où :

L : matrice triangulaire inférieure unitaire.

U : matrice triangulaire supérieure obtenue par la méthode de Gauss ordinaire.

Résolution : le système (1) devient :

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow L \cdot U \cdot x = b \Leftrightarrow \begin{cases} L \cdot y = b \dots (2) \\ U \cdot x = y \dots (3) \end{cases}$$

Donc la résolution de $A \cdot x = b$ revient à la résolution des deux systèmes (2) et (3) (la résolution de ces dernières est immédiate, puisque les matrices L et U sont triangulaires).

La méthode : par Gauss ordinaire, on obtient :

$$A^{(n)} \cdot x = b^{(n)}$$

On pose alors $U = A^{(n)}$ et on démontre par identification que:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \alpha_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \text{ Avec : } \alpha_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

L est donc la matrice des multiplicateurs à chaque étape de la méthode. Par conséquent, en appliquant la méthode de Gauss ordinaire à A, on obtient la décomposition L.U.

$A = L \cdot U$

Il s'ensuit que :

$$\det A = \det(L \cdot U) = \det L \cdot \det U = \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k)}$$

Question : Sous quelles conditions a priori, la méthode L. U est applicable à la matrice A ?

Théorème : soient A une matrice d'ordre n et $A_{(k)}_{1 \leq k \leq n-1}$ les sous matrices principales d'ordre k de A .

A se décompose sous forme $L.U$ si et seulement si : $\det A_{(k)} \neq 0 \forall k, 1 \leq k \leq n$.

Preuve :

Il suffit de montrer par récurrence que :

$$a_{kk}^{(k)} = \frac{\det A_{(k)}}{\prod_{i=1}^{k-1} a_{ii}^{(i)}} \neq 0$$

Exemple : Sans faire les calculs, peut-on dire que A admet la décomposition $L.U$?

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & -3 & -8 & -1 \\ 2 & -32 & 25 & -3 \\ -2 & 8 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Comme $\det A_{(k)} \neq 0, 1 \leq k \leq 4 \Rightarrow$ La méthode de Gauss ordinaire est applicable alors A se décompose sous forme LU , i.e. : $A = L.U$.

Remarque :

- 1) Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0 \forall k$ alors la méthode de Gauss ordinaire est applicable et donc A se factorise sous forme $L.U$.
- 2) La décomposition $L.U$ est unique.
- 3) S'il existe $1 \leq k \leq n - 1$ tel que $a_{kk}^{(k)} = 0$. La méthode de Gauss ordinaire n'est plus applicable. On applique la méthode de Gauss avec permutations de lignes pour avoir la décomposition de A sous forme : $A=P.L.U$ tel que : P est la matrice de permutation.
- 4) Si A se factorise sous forme $L.U$ alors : $A=L.D.V$ avec :

$$\begin{cases} L: \text{matrice triangulaire inférieure unitaire.} \\ D: \text{matrice diagonale de } U. \\ V = D^{-1}.U = \begin{pmatrix} u_{ij} \\ u_{ii} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

4) Décomposition en $L.D.L^T$ d'une matrice symétrique :

Définition : A est dite symétrique si : $A = A^t$; $(a_{ij} = a_{ji})$

$$A = L.U \Rightarrow L.D.V = A$$

$$A = A^t \Rightarrow L.D.V = (L.D.V)^t = V^t.D.L^t \text{ donc :}$$

$$L = V^t \text{ ou } V = L^t \quad \text{d'où :}$$

$$A = L.D.L^t$$

grâce à l'unicité de la décomposition LU.

5) Méthode de Cholesky :

Définition : Soit A une matrice symétrique, on dit qu'elle est définie positive si et seulement

$$\text{si } \begin{cases} x^t A x \geq 0 \quad \forall x \text{ vecteur de } \mathbb{R}^n \\ \text{et} \\ x^t A x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$$x^t A x = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2 x_2 \\ 2 x_1 + 8 x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 2 x_2)^2 + 4 x_2^2 \geq 0$$

Et

$$\text{Si : } x^t A x = 0 \text{ alors } (x_1 + 2 x_2)^2 + 4 x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad x = 0$$

Théorème 1 : A est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs ($\det A_{(k)} \neq 0$), $1 \leq k \leq n$.

Théorème 2 : Si A est strictement définie positive alors elle admet la décomposition L. D. L^t et

$$d_{kk} > 0, \forall k, 1 \leq k \leq n$$

On a:

$$A = L.D.L^t = L.\sqrt{D}.\sqrt{D}.L^t$$

Et

$$(L \cdot \sqrt{D})^t = \sqrt{D} \cdot L^t$$

Donc :

$$A = (L \cdot \sqrt{D}) \cdot (L \cdot \sqrt{D})^t$$

Posons :

$$R = L \cdot \sqrt{D}$$

R : Matrice triangulaire inférieure et les éléments diagonaux de R sont strictement positifs.

On a donc :

Théorème 3 :

Soit A une matrice symétrique d'ordre n, alors $A = R \cdot R^t$ où R est triangulaire inférieure à éléments diagonaux strictement positifs si et seulement si A est strictement définie positive.

Remarque :

- 1) R n'est pas unique.
- 2) La décomposition devient unique si l'on fixe à l'avance les éléments diagonaux R_{ii} avec $R_{ii} > 0$.

5-1) Algorithme de Cholesky :

Pour le calcul de R, on peut utiliser soit la décomposition L. U puis $L \cdot D \cdot L^t$ puis $R = L \cdot \sqrt{D}$, soit utiliser un procédé d'identification qu'on appelle « **Algorithme de Cholesky** ».

On multiplie les matrices R et R^t , puis on identifie les coefficients respectifs dans l'égalité :

$A = R \cdot R^t$ colonne par colonne on obtient :

1 ^{ère} colonne	2 ^{ème} colonne
$r_{11} = \sqrt{a_{11}}$ $r_{i1} = \frac{a_{i1}}{r_{11}}, i \geq 2$	$r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{21}^2}$ $r_{i2} = \frac{1}{r_{22}} (a_{i2} - r_{i1} \cdot r_{21}), 3 \leq i \leq n$

Ainsi à la $k^{\text{ème}}$ colonne :

On a l'algorithme suivant :

$$r_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{kj}^2}, 2 \leq k \leq n.$$

$$r_{ik} = \frac{1}{r_{kk}} (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{ij} \cdot r_{kj})$$

5-2) Résolution du système $A \cdot x = b$

Résoudre $A \cdot x = b$ revient alors à résoudre : $R \cdot R^t \cdot x = b \Rightarrow \begin{cases} R \cdot y = b \\ R^t \cdot x = y \end{cases}$

Remarque :

1) La méthode de Cholesky nécessite $\frac{n^3}{3}$ opérations élémentaires (meilleure que celle de Gauss).

2) $\det A = \det (R \cdot R^t) = (\det R)^2 = \prod_{i=1}^n r_{ii}^2$

3) Pour une matrice définie positive, on a :

$$r_{kk}^2 = a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{kj}^2 > 0$$

4) Si à une étape de calcul on trouve $r_{kk}^2 \leq 0$ alors A n'est pas définie positive et par conséquent A n'admet pas la décomposition de Cholesky .Par contre elle peut être décomposé sous forme $A=R \cdot S$ avec S égale à R^t à un signe près.

3) Méthodes itératives :

Lorsque n est très grand ($n \geq 100$), la résolution des systèmes $A \cdot x = b$ pour les matrices directes devient très compliquée.

On fait appel donc à des méthodes, dites itératives.

Définition :

Une méthode itérative de résolution de $A \cdot x = b$, consiste d'abord à passer au système $x = B \cdot x + c$ (que l'on déterminera) et sa solution est alors la limite de la suite définie par :

$$x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$$

D'une manière générale : On décompose A sous forme $A = M - N$ avec M facilement inversible. Alors :

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow x = M^{-1} \cdot N \cdot x + M^{-1} \cdot b$$

On pose :

$$B = M^{-1}.N \text{ et } C = M^{-1}.b$$

On obtient : $x = B.x + C$

En utilisant le principe du théorème point fixe , on construit la suite :

$$x^{(k+1)} = F(x^k) = B.x^k + C$$

Convergence :

$$(*) \dots \begin{cases} x^{(k+1)} = B.x^k + C \\ x^0 \text{ donné} \end{cases}$$

La méthode itérative (*) converge si et seulement si $\rho(B) < 1$.

($\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|\}$ Où λ_i sont les valeurs propres de B)

Lorsque (*) converge, la suite $x^{(k+1)}$ possède une limite \bar{x} et dans ce cas :

$$\text{Lim}_k . x^{(k+1)} = B . \text{Lim}_k . x^{(k)} + C \Leftrightarrow A . x = b.$$

Donc : la limite \bar{x} est la solution de $A . x = b$.

3-1) Méthode de Jacobi

On suppose que les $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$

On décompose la matrice sous forme :

$$A = D - E - F = D - (E + F).$$

Avec :

D = diagonale de A.

$$E = \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On pose : $M = D, N = E + F$

En partant de : $B.x^{(k)} + C$ avec $B = M^{-1}.N$, on obtient l'algorithme suivant :

$$(1) \begin{cases} x^{(k+1)} = J.x^k + C \text{ avec } J = D^{-1}(E + F), C = D^{-1}b \\ x^0 \text{ donné} \end{cases}$$

(1) est l'algorithme de Jacobi, J étant la matrice de Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} [b_i - \sum_{j < i} a_{ij} . x_j^{(k)} - \sum_{j > i} a_{ij} . x_j^{(k)}]$$

$$J = D^{-1}(E + F) = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Convergence de la méthode de Jacobi

Théorème : L'algorithme de Jacobi converge $\forall x^{(0)}$ si et seulement si le rayon spectral de J est strictement inférieur à 1 ,

C'est-à-dire :

$\rho(J) < 1$ où $\rho(J) = \max(|\lambda_i|)$, λ_i sont les valeurs propres de J.

Remarque :

- 1) En pratique, le calcul de $\rho(J)$ est très compliqué. Il suffit alors de vérifier si $\|J\| < 1$ puisque $\rho(J) \leq \|J\|$.
- 2) La méthode de Jacobi converge si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
 - a) $\|J\|_i < 1$ pour l'une des normes matricielles.
 - b) Si $|J_{i,j}| < \frac{1}{n}, \forall i, j$, où n est la dimension du système alors la méthode de Jacobi converge.
 - c) Si $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \forall i$ Alors le processus converge.

Dans ce cas, on dit que la matrice A est à diagonale strictement dominante.

3-2) Méthode de Gauss-Seidel

Posons : $M = D - E, N = F$

$$G = M^{-1}.N = (D - E)^{-1}.F$$

Et l'algorithme de Gauss –Seidel s'écrit :

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = G.x^{(k)} + C \text{ avec } x^{(0)} \text{ donné} \\ G = (D - E)^{-1}.F \text{ et } C = (D - E)^{-1}.b \end{cases}$$

Ou encore :

$x^{(0)}$ donné

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} [b_i - \sum_{j < i} a_{ij}.x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{ij}.x_j^{(k)}], \quad i = 1, \dots, n$$

Remarque :

- 1) Pour pouvoir appliquer la méthode de Gauss-Seidel, il faut que (comme Jacobi) a_{ii} soient $\neq 0$.
- 2) Tous les résultats de convergences pour Jacobi restent valables pour la méthode de Gauss-Seidel.
- 3) Si A symétrique strictement définie positive alors Gauss-Seidel converge.
- 4) Si A est tridiagonale alors : $\rho(G) = \rho(J)^2$.

Evaluation de l'erreur :

Théorème :

$$\text{Soit } \begin{cases} x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + C \\ x^{(0)} \text{ donné} \end{cases}$$

Une méthode itérative quelconque avec $B = G$ ou J ou une autre matrice d'itération.

Si $\|B\| < 1$ alors la suite $(x^{(k)})$ converge vers la solution x de $A \cdot x = b \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et on a l'inégalité suivante :

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

$\|B\|$ peut être remplacé par $\rho(B)$.

La dernière inégalité permet d'estimer à l'avance le nombre d'itérations possibles pour approcher la solution avec une précision ε donnée.