Université de M'sila	Correction de Série: N 03 **-Différentiabilité-**	Faculté des Mathématiques et d'Informatique
L 2 Mathématiques		Module: Analyse 4

Remarque 1

l'exercice noté par $(\star)$ ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de **TD**

Correction d' exercice 1 ☆

1 Établir que la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

(a) On étude la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$.
Les fonctions $(x,y) \mapsto xy$ et $(x,y) \mapsto \frac{1}{y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$, comme fonction polynôme et fonction rationnelle et la fonction $t \mapsto \sin(t)$ et continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$ comme produit et composée de fonctions continues.

(b) On étude la continuité de f sur D.
Soit $(a,0)$ est un point dans D avec $a \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $(x,y) \in D$, on a

$$\left|f(x,y) - f(a,0)\right| = \left|xy\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq \left|xy\right|,$$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} \left|xy\right| = 0$, donc, on trouve $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} \left|f(x,y) - f(a,0)\right| = 0$.
d'où la continuité en point $(a,0)$. Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que f admet des dérivées partielles premières par rapport à x et par rapport à y en tout point (x,y) de $\mathbb{R}$ tel que $y \neq 0$, et en $(0,0)$.

(a) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\sin(\frac{1}{y}) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\Big(\sin(\frac{1}{y}) - \frac{1}{y}\cos(\frac{1}{y})\Big).$$

(b) En point $(0,0)$ comme $(0,0) \in D$. Alors, on a $f(x,0) = f(0,0) = 0$, et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0.\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0.\end{aligned}$$

3 Il est clair que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$.
On étudie la continuité sur D. soit $(a,0)$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors, comme $f(a+h,0) = 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,0)-f(a,0)}{h} = 0.$$

Donc, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,0)\right| = \lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} \left|y\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| = 0$. D'où la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(a,0)$.

Pour la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,k)-f(a,0)}{h} = \lim_{k\to 0} a\sin(\frac{1}{k}).$$

4 (a) Si $a \neq 0$ cette limite n'existe pas.

(b) Si $a = 0$ on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{h} = 0$. Donc,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| x\Big(\sin(\frac{1}{y}) - \frac{1}{y}\cos(\frac{1}{y})\Big) \right|.$$

Si on pernd $x_n = y_n = \frac{1}{2n\pi}$, on obtient,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{1}{2n\pi}\Big(\sin(2n\pi) - 2n\pi\cos(2n\pi)\Big) \right| = 1 \neq 0.$$

D'où la discontinuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.

Correction d' exercice 2 ☆

1 Si $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 4y^5$. Alors, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3y^2, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 20y^4.$$

2 Pour $f(x,y) = y\cos(e^{xy+3y})$. On trouve, donc,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y^2\sin(e^{xy+3y}), \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(e^{xy+3y}) - y(x+3)\sin(e^{xy+3y}).$$

3 Les dérivées partielles premièresles de $f(x,y,z) = x\sin(yz) - \ln(3 - e^{x+y})$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(yz) - \frac{-e^{x+y}}{3 - e^{x+y}}, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xz\cos(yz) - \frac{-e^{x+y}}{3 - e^{x+y}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = xy\cos(yz).$$

Correction d' exercice 3 ☆

1 On calcule la dérivée directionnelle de la fonction: $f(x,y) = 3x^2y - 4xy$, au point $(1,2)$, le long la direction $\overrightarrow{v} = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\Big)$.
D'après la définition on a:

$$D_v f(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+\sqrt{3}2t, 2-\frac{1}{2}t) - f(1,2)}{t} = \lim_{t\to 0}(-\frac{9}{8}t^2 + \frac{9-\sqrt{3}}{2}t + \frac{1+4\sqrt{3}}{2}) = \frac{1+4\sqrt{3}}{2}$$

2 Le gradient de f est le vecteur

$$\nabla f(x,y) = \Big(6xy - 4y, 3x^2 - 4x\Big).$$

Le gradient de f au point $(1,2)$ est:

$$\nabla f(1,2) = \Big(4, -1\Big).$$

Finalement, on trouve

$$\nabla f(1,2).v = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2).v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2).v_2 = 4\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{1}{2}) = D_v f(1,2).$$

Correction d' exercice 4 ☆

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$. Calculer la dérivée directionnelle au point $(1,1,1)$ selon la direction des vecteurs suivantes

1 Selon $\overrightarrow{v} = (2,1,3)$. On a

$$\nabla f(x,y,z) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\Big) = (1, 2y, 3z^2).$$

$$\nabla f(1,1,1) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1), \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)\Big) = (1,2,3).$$

Par conséquent, on aura,

$$D_v f(1,1,1) = \nabla f(1,1,1).\overrightarrow{v} = (1,2,3).(2,1,3) = 13.$$

2 Si $\overrightarrow{v} = (1,-1,1)$. on obtient

$$D_v f(1,1,1) = \nabla f(1,1,1).\overrightarrow{v} = (1,2,3).(1,-1,1) = 2.$$

Correction d' exercice 5 ☆

Calculons les dérivées partielles premières des fonctions suivantes.

1 Si $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 4y^5$. Alors, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3y^2, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 20y^4.$$

2 Pour $f(x,y) = y\cos(e^{xy+3y})$. On trouve, donc,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y^2\sin(e^{xy+3y}), \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(e^{xy+3y}) - y(x+3)\sin(e^{xy+3y}).$$

3 Les dérivées partielles premièresles de $f(x,y,z) = x\sin(yz) - \ln(3 - e^{x+y})$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(yz) - \frac{-e^{x+y}}{3-e^{x+y}}, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xz\cos(yz) - \frac{-e^{x+y}}{3-e^{x+y}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = xy\cos(yz).$$

Correction d' exercice 6 ☆

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par: $f(x,y) = \begin{cases} xy\Big(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Big) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1 On étudiant la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Car les fonctions $(x,y) \longmapsto xy$, $(x,y) \longmapsto x^2+y^2$ et $(x,y) \longmapsto x^2 - y^2$ (des polynêmes). Donc, il reste de prouver la continuité en point $(0,0)$.
En utilisant les coordonnées polaires, posons, donc

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta, \quad \text{où } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

Alors, on trouve,

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta.$$

Par suite, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| = \lim_{r\to 0}|(r^2\sin\theta\cos\theta)\cos 2\theta| \leq \lim_{r\to 0} r^2 = 0$. Donc,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

D'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2 On calcule $\nabla f(x,y)$.

(a) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{yx^4 - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{xy^4 - x^5 + 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

.

(b) Pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 D'après ce qui précède on a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy^3(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 1 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = -1 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4 Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ le théorème de Schwarz permet de conclure que les dérivées secondes croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ ne sont pas continue en $(0,0)$.

Correction d' exercice 7 ☆

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Car quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est aussi continue en $(0,0)$, en effet, on utilisant les coordonnées polaires, on trouve:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{r\to 0} |r^2 \sin^2\theta \cos^2\theta| \leq \lim_{r\to 0} r^2 = 0 = f(0,0).$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 On calcule $\nabla f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3 On calcule $\nabla f(x,y)$.

(a) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

.

(b) Pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. C'est à dire,

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{j}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\vec{j}, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}(y^3\vec{i} + x^3\vec{j}), & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\vec{i} + 0\vec{i} = \vec{0}, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$?
En utilisant l'inégalité: $2|xy| \leq x^2 + y^2$, , on peut faire les majorations suivantes:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \frac{|y^3|}{(x^2+y^2)^2} = \frac{|y||y^2|}{(x^2+y^2)^2} \leq |y|.$$

Par passage à la limite on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue en $(0,0)$.
Sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. C'est à dire $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
De manière analogue, on démontre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et par conséquent $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

5 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, donc, elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Correction d' exercice 8 ☆

En utilisant la définition, pour calculons la différentiable de f dans le point indiqué.
Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

1 Pour $f(x,y) = xy - 3x^2$, en $(1,2)$, on a $f(1,2) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - 6x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -4$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1$. Donc,

$$\frac{f(x,y) - f(2,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = \frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x-1) - (y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 1 + r\cos\theta,\ y = 2 + r\sin\theta$, ce rapport se réécrit

$$\frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x-1) - (y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = r\cos\theta(\sin\theta - 3\cos\theta).$$

On a alors,

$$\left|\frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x-1) - (y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}}\right| \leq 4r \underset{r\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left|\frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x-1) - (y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}}\right| = 0.$$

La fonction f est donc différentiable en $(1,2)$. Donc, en résulte que

$$df(1,2) = -4(x-1) + (y-2) = -4x + y + 2.$$

2 Si $f(x,y) = xy - 2y^2$, $(2,1)$, on a $f(2,1) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - 6y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -4$. Donc,

$$\frac{f(x,y) - f(2,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) - \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}} = \frac{xy - 3y^2 + 1 - (x-2) + 4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 4 + r\cos\theta,\ y = 1 + r\sin\theta$, ce rapport se réécrit

$$\frac{xy - 3y^2 + 1 - (x-2) + 4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}} = rsin\theta(\cos\theta - 3\sin\theta).$$

Par suite,

$$\left|\frac{xy - 3y^2 + 1 - (x-2) + 4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}}\right| \leq 4r \underset{r\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left|\frac{xy - 3y^2 + 1 - (x-2) + 4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}}\right| = 0.$$

Par coséquent f est différentiable en $(2,1)$ et on a donc,

$$df(2,1) = (x-2) - 4(y-2) = x - 4y + 6.$$

3 $f(x,y) = y\sqrt{x}$, en $(4,1)$.

$$\begin{cases} f(x,y) = y\sqrt{x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(4,1) = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(4,1) = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(4,1) = 2 \end{cases}$$

On vu que, donc,

$$\frac{f(x,y) - f(4,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(4,1)(x-4) - \frac{\partial f}{\partial y}(4,1)(y-1)}{\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}} = \frac{y\sqrt{x} - 2 - \frac{1}{4}(x-4) - 2(y-1)}{\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 4 + r\cos\theta,\ y = 1 + r\sin\theta$, ce rapport se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{y\sqrt{x} - 2 - \frac{1}{4}(x-4) - 2(y-1)}{\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}} &= \frac{(1 + r\sin\theta)\sqrt{4 + r\cos\theta} - 2 - \frac{r\cos\theta}{4} - 2r\sin\theta}{r} \\ &= \frac{2(1 + r\sin\theta)\sqrt{1 + \frac{r\cos\theta}{4}} - 2 - \frac{r\cos\theta}{4} - 2r\sin\theta}{r} \\ &= \frac{2(1 + r\sin\theta)(1 + \frac{r\cos\theta}{8} + o(r)) - 2 - \frac{r\cos\theta}{4} - 2r\sin\theta}{r} \\ &= \frac{r}{4}\sin\theta\cos\theta + \frac{o(r)}{r} \underset{r\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0\,. \end{aligned}$$

où on a utilisé l'approximation $\sqrt{1+t} \simeq 1 + \dfrac{t}{2} + o(t)$, lorsque $t \simeq 0$. On obtient, donc,

$$\lim_{(x,y)\to(4,1)} \frac{f(x,y) - f(4,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(4,1)(x-4) - \frac{\partial f}{\partial y}(4,1)(y-1)}{\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}} = 0.$$

Par coséquent f est différentiable en $(4,1)$ et on a donc,

$$df(4,1) = \frac{1}{4}(x-4) + 2(y-1) = \frac{1}{4}x + 2y - 3.$$

Correction d' exercice 9 ☆

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Calculer les dérivées partielles en point $(0,0)$.
2. Calculer les dérivées partielles premières en $(0,0)$.
3. Étudier la continuité des dérivées partielles premières en $(0,0)$.
4. Est ce que f est différentiable en $(0,0)$?

Correction d' exercice 10 ☆

La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, est dans $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, car elle est polynômiale, et sa différentielle donner par.

$$df = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz.$$

Correction d' exercice 11 ☆

Nous donnons une valeur approchée de $f(2.2, 4.9)$. Sachant que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable et que

$$f(2,5) = 6,\ \partial_x f(2,5) = 1,\ \text{et}\ \partial_y f(2,5) = -1$$

Soit $L_{(2,5)}(x,y) = 0$ l'équation du plan tangent à f au point $(2,5)$. Alors, on a approche

$$f(2.2, 4.9) \simeq L_{(2,5)}(2.2, 4.9),$$

et comme,

$$L_{(2,5)}(x,y) = f(2,5) + (x-2)\frac{\partial f}{\partial x}(2,5) + (y-5)\frac{\partial f}{\partial y}(2,5) = x - y + 9.$$

Donc, on vu que $f(2.2, 4.9) \simeq 6.3$.

Correction d' exercice 12 ☆

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, telles que

$$f(u,v) = u + v,\ \text{où}\ u(x,y) = e^{x+y}\ \text{et}\ v(x,y) = x^2 + y^2.$$

On calcule les dérivées partielles d'ordre un de la fonction f.

$1^{ière}$ Méthode: On utilise la formule de la dérivée partielle d'une fonction composée suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ et \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Alors, on obtient, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} + 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} + 2y$.

$2^{ième}$ Méthode: Posons $F = f \circ g$. On a donc,

$$\begin{array}{ccccc} F : \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 & \overset{f}{- - - \longrightarrow} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (u(x,y), v(x,y)) & \longmapsto & f(u,v). \end{array}$$

La matrice Jacobinne de la première application g est la suivante:

$$J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobinne associée à f est la suivante:

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \ \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \left(1, \ 1 \right)$$

Ce qui signifie que

$$J_F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \ \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \ , \frac{\partial f}{\partial v} \right) \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \left(e^{x+y} + 2x, \ e^{x+y} + 2y \right)$$

Correction d' exercice 13 ☆

On donne le développement limité de d'ordre 2 en $(0,0)$ des fonctions suivantes:

1 On utilise les les dévellopements limités usuelles au voisinage de 0 suivantes

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2), \ \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2), \text{ et } e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2).$$

Donc, a au voisinage de 0 on vu que:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2).$$

Donc, le dévellopement limité de f de d'ordre 2 en $(0,0)$ est donner par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\cos x}{\cos y} = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + o(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

2 On a au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+y} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{y}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2 + o(x^2 + y^2)\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{e^x}{2+y} = \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2 + o(y^2)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + o(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

3 Si $x,\ y$ au voisinage de 0, alors, $x+y$ aussi au voisinage de 0, et on a

$$\cos(x+y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) + o(x^2+y^2).$$

D'où,

$$\begin{aligned} e^{\cos(x+y)} &= e \times \left(e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)}\right) \\ &= e \times \left(1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) + o(x^2+y^2)\right). \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} e^y \cos x &= \left(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= 1 + y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + o(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Correction d' exercice 14 ☆

1 On souhaite démontrer que

$$f(x,y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4} \underset{\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\to 0}{\longrightarrow} f(0,0) = 0.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Comme $(y-x^2)^2+x^4 \geq 0$ et $(y-x^2)^2+x^4 \geq 0$. Donc,

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x,y)| &= \left|\frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4}\right| = \left|\frac{|x||x|^4}{(y-x^2)^2+x^4}\right| \\ &\leq \left|\frac{|x||x|^4}{x^4}\right| = |x| \leq= \frac{x^2+y^2}{=}\|(x,y)\|. \end{aligned}$$

Ainsi, par Théorème d'encadrement

$$f(x,y) \underset{\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\to 0}{\longrightarrow} f(0,0) = 0.$$

2 Soit $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Donc au moins l'un des nombres $h_1,\ h_2$ est non nul. Soit $t \in$ '$\mathbb{R}^*$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \frac{f((0,0)+t(h_1,h_2)) - f(0,0)}{t} &= \frac{1}{t}\frac{t^5h_1^5}{(th_2-t^2h_1^2)^2+t^4h_1^4} \\ &= \frac{t^2h_1^5}{h_2^2 - 2th_1^2h_2 + 2t^2h_1^4} \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas.

(a) Si $h_2 \neq 0$, alors,

$$\frac{f((0,0)+t(h_1,h_2)) - f(0,0)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2h_1^5}{h_2^2} \underset{t\to 0}{\to} 0.$$

Donc f est dérivable en $(0,0)$ suivant le vecteur $h = (h_1,h_2)$ et

$$D_hf(0,0) = 0.$$

(b) Si $h_2 = 0$, alors, comme $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$ ça signifier que $h_1 \neq 0$, et on a

$$\frac{f((0,0) + t(h_1,h_2)) - f(0,0)}{t} = \frac{t^2 h_1^5}{2t^2 h_1^4} = \frac{h_1}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{h_1}{2}.$$

Donc f est dérivable en $(0,0)$ suivant le vecteur $h = (h_1, h_2)$ et

$$D_h f(0,0) = \frac{h_1}{2}.$$

Correction d' exercice 15 ☆

Soit la fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1 (a)

$$\begin{array}{rcccl} F : \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) & \longmapsto & f(y,x). \end{array}$$

La matrice Jacobinne de la première application g est la suivante:

$$J_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobinne associée à f est la suivante:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ce qui signifie que

$$\begin{aligned} J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y, & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement on trouve,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) \quad \text{et,} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x).$$

(b) Application:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) = 2xy \quad \text{et,} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = 3y^2 + x^2.$$

2 (a)

$$\begin{array}{rcccl} F : \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x,x) & \longmapsto & f(x,x). \end{array}$$

La matrice Jacobinne de la première application h est la suivante:

$$J_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobinne associée à f est la suivante:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Cela nous donnons

$$F'(x) = J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x, & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} + & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x, & x \end{pmatrix}$$

(b) Application:

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 \Rightarrow F(x) = f(x,x) = 2x^3 \Rightarrow F'(x) = (3x^2 + y^2 + 2xy)_{(x,x)} = 6x^2.$$

Correction d' exercice 16 ☆

Posons $f(x,y) = xe^y + e^x \sin(2y)$.

1 Notons que $(0,0)$ est une solution de léquation $f(x,y) = 0$. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + e^x \sin(2y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + 2e^x \cos(2y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2 \end{cases}$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie au voisinage de 0 tel que $f(x, \varphi(x)) = 0$.

2 Comme,

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -\frac{1}{2}.$$

Alors, l'équation de la droite tangente à φ en $x = 0$ est $y = -\frac{1}{2}x$.

3 On a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Correction d' exercice 17 ☆

On posons $f(x,y) = 2x^3y + 2x^2 + y^2$.

1 Notons que $(1,1)$ est une solution de léquation $f(x,y) = 0$. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2y + 4x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3 + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 10 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4 \end{cases}$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie au voisinage de 1 tel que $f(x, \varphi(x)) = 1$.

2 Comme,

$$\varphi'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)} = -\frac{5}{2}.$$

Donc, l'équation de la droite tangente à φ en $x = 1$ est

$$y = -\frac{5}{2}(x-1) + 1 = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}.$$

3 le développement de Taylor de φ à l'ordre 1 en point 1.

$$\varphi(x) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) + o(x) = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}x + o(x).$$

Correction d' exercice 18 ☆

On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $1 + x - y \neq 0$,

$$f(x,y) = \frac{2+x+y}{1+x-y} = (2+x+y) \times \frac{1}{1+x-y}.$$

Si (x,y) au voisinage de $(0,0)$ alors, on a aussi $x - y$ au voisinage de 0. En utilisant le développemet limité de Taylor à l'ordre 2 suivant

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (2+x+y) \times \frac{1}{1+x-y} \\ &= (2+x+y) \times (1-(x-y)+(x-y)^2 + o(x^2+y^2) \\ &= 2 - x + 3y + x^2 - y^2 - 4xy + o(x^2+y^2). \end{aligned}$$