Université de M'sila

Faculté de Maths-Info

Différentiabilité

L2 Maths

Module: Analyse 4

Série d'exercices n°3

Licence mathématiques-L2 2023

Remarque 1

l'exercice noté par ($\star$) ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de **TD**

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par: $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & si\ y \neq 0 \\ 0 & si\ y = 0 \end{cases}$

1. Établir que la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières par rapport à x et par rapport à y en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $y \neq 0$ et en $(0,0)$.
3. Étudier la continuité des fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 2

Dans chaque cas, calculer toutes les dérivées partielles premières des fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 4y^5$
2. $f(x,y) = y\cos(e^{xy+3y})$.
3. $f(x,y,z) = x\sin(yz) - \ln(3 - e^{x+y})$.

Exercice 3

1. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction: $f(x,y) = 3x^2y - 4xy$, au point $(1,2)$, le long la direction $\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.
2. Vérifier l'equalité $D_v f(1,2) = \nabla f(1,2).v = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2).v_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2).v_2$.

Exercice 4

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$. Calculer la dérivée directionnelle au point $(1,1,1)$ selon la direction des vecteurs suivantes

1. $\overrightarrow{v} = (2,1,3)$
2. $\overrightarrow{v} = (1,-1,1)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par: $f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2(\star)$.
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en tout point.

4. Que peut-on déduire du calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$?

Exercice 6

Vérifier, en utilisant la définition, que les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont différentiables dans le point indiqué:

1. $f(x,y) = xy - 3x^2$, en $(1,2)$.
2. $f(x,y) = xy - 2y^2$, en $(-2,3)$. $(\star)$
3. $f(x,y) = y\sqrt{x}$, en $(4,1)$, $(\star)$.

Exercice 7

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Est ce que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Calculer les dérivées partielles en point $(0,0)$.
2. Calculer les dérivées partielles premières en $(0,0)$.
3. Étudier la continuité des dérivées partielles premières en $(0,0)$.
4. Est ce que f est différentiable en $(0,0)$?

Exercice 9

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.
Vérifier que f est différentiable et donner sa différentialle.

Exercice 10

Sachant que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable et que

$$f(2,5) = 6,\ \partial_x f(2,5) = 1,\ \text{et}\ \ \partial_y f(2,5) = -1$$

donner une valeur approchée de $f(2.2, 4.9)$.

Exercice 11

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, telles que

$$f(u,v) = u + v,\ \text{où}\ u(x,y) = e^{x+y}\ \text{et}\ v(x,y) = x^2 + y^2.$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre un de la fonction f.

Exercice 12

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, telles que

$$f(u, v) = u + v, \text{ où } u(x, y) = e^{x+y} \text{ et } v(x, y) = x^2 + y^2.$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre un de la fonction f.

Exercice 13

Donner le développement limité de d'ordre 2 en $(0, 0)$ des fonctions suivantes

1. $f(x, y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$.
2. $f(x, y) = \dfrac{e^x}{2 + y}$.
3. $f(x, y) = e^{\cos(x+y)}, \ (\star)$.
4. $f(x, y) = e^y \cos x, \ (\star)$.

Exercice 14

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^4} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Démontrer que la fonction f est continue en $(0, 0)$.
2. Démontrer que la fonction f admet une dérivée selon tout vecteur non nul $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ au point $(0, 0)$.

Exercice 15

Soit la fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. (a) $F(x, y) = f(y, x)$ (b) $F(x) = f(x, x)$
2. Vérifier vos résultats sur l'exemple $f(x, y) = x^3 + xy^2$.

Exercice 16

On considère la courbe plane d'équation

$$xe^y + e^x \sin(2y) = 0. \tag{1}$$

1. Vérifier que l'équation (1) définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0, 0)$.
2. Calculer $\varphi(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(0, \varphi(0))$.
3. En déduire la limite de $\dfrac{y}{x}$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ en étant sur la courbe.

Exercice 17

On considère la courbe plane d'équation

$$2x^3y + 2x^2 + y^2 = 0. \tag{2}$$

1. Vérifier que l'équation (2) définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1, 1)$.

2. Calculer $\varphi(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(1, \varphi(1))$.

3. Calculer le développement de Taylor de φ à l'ordre 1 centré en 1.

Exercice 18 ★★★

Trouvons le développement limité au voisinage de $(0,0)$ à l'ordre 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{2+x+y}{1+x-y}.$$