

# TP de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

Master EDP

Nom et Prénom

Date

## Résumé

Le tp consiste à reproduire ce document. Utiliser la classe `article` avec les options `a4paper, 11pt`. Ensuite transformer le à un exposé en utilisant la classe Beamer.

## Table des matières

<b>1 Fonctions de variables réelles</b>	<b>1</b>
1.1 Fonctions continues . . . . .	1
1.2 Les application linéaires . . . . .	2
<b>2 Une équation d'évolution</b>	<b>2</b>
2.1 Le problème . . . . .	2
2.2 existence et unicité . . . . .	2
<b>Références</b>	<b>2</b>

## 1 Fonctions de variables réelles

### 1.1 Fonctions continues

**Définition 1** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application. L'application  $f$  est continue en  $x_0 \in I$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (1)$$

**Théorème 2** L'image d'un intervalle fermé borné par  $f$  est un intervalle fermé borné (segment).

**Proof.** cf.[1] ■

## 1.2 Les application linéaires

**Définition 3** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} & (f \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans } F) \\ & \quad \updownarrow \\ & (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)). \end{aligned}$$

## 2 Une équation d'évolution

### 2.1 Le problème

Pour  $\rho > 0$ ,  $Q_\ell = [0, T] \times \Omega_\ell$  on considère le problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_\ell}{\partial t^2} - \Delta u_\ell + |u_\ell|^\rho u_\ell = f, & f \in L^2(Q_\ell). \\ u_\ell|_\Gamma = 0 \\ u_\ell(0) = 0 \text{ and } u'_\ell(0) = 0. \end{cases} \quad (NP_\ell)$$

### 2.2 existence et unicité

On a le théorème suivant (cf. [2])

**Théorème 4** Il existe une solution  $u_\ell$  de  $(NP_\ell)$  satisfaisant ( $r = \rho + 2$ )

$$u_\ell \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^r(\Omega)), \quad u'_\ell \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2)$$

On a l'unicité si  $\rho \leq \frac{2}{n-2}$ , ( $\rho$  quelconque si  $n = 2$ ).

**Lemme 5 (égalité d'énergie)** La solution  $u_\ell$  du problème  $(NP_\ell)$  satisfait

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\ell} |u'_\ell(t)|^2 dx + \int_{\Omega_\ell} |\nabla u_\ell(t)|^2 dx + \frac{1}{r} \int_{\Omega_\ell} |u_\ell(t)|^r dx \\ & \leq \int_{\Omega_\ell} |u_\ell^1|^2 dx + \int_{\Omega_\ell} |\nabla u_\ell^0|^2 dx + \frac{1}{r} \int_{\Omega_\ell} |u_\ell|^r dx + 2 \int_0^t \int_\Omega f u'_\ell dx ds. \end{aligned}$$

## Références

- [1] J. DIXMIR, *Cours d'analyse 1, 2*. Université de M'sila, 2007-2008.
- [2] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod-Gautier Villars, 1969.

Good L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

```

\documentclass[a4paper,11pt]{article}
%
\usepackage{amsfonts,amsmath}
\usepackage[français]{babel}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage[latin1]{inputenc}%add this if you have a problem with french characters
%
\newtheorem{theorem}{Théorème}
\newtheorem{lemma}[theorem]{Lemme}
\newtheorem{definition}[theorem]{Définition}
\newenvironment{proof}[1][Proof]{\noindent\textbf{#1.} }{\ \rule{0.5em}{0.5em}}
\title{\underline{TP de \LaTeX}\ \ \ \small Master $\mathbb{EDP}$}
\author{Nom et Prénom}
\date{Date}
%
\begin{document}

\maketitle

\begin{abstract}
Le tp consiste à reproduire ce document. Utiliser la classe\texttt{article} avec les
options \texttt{a4paper,11pt.}
Ensuite transformer le à un exposé en
utilisant la classe Beamer.
\end{abstract}
%
\tableofcontents

\section{Fonctions de variables réelles}
%
\subsection{Fonctions continues}

\begin{definition}
Soit  $f:I\rightarrow\mathbb{R}$  une application. L'application  $f$  est continue en  $x_0$  si et
seulement si
\begin{equation}
\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 : \left| x - x_0 \right| < \eta \implies \left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon .
\end{equation}
\end{definition}

\begin{theorem}
L'image d'un intervalle fermé borné par  $f$  est un intervalle fermé é borné \emph{(}segment\emph{)}.
\end{theorem}

\begin{proof}
cf.\cite{dd}
\end{proof}
%
\subsection{Les application linéaires}

\begin{definition}

```

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

```
\begin{equation*}
\begin{array}{c}
(f \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans } F) \\
\Downarrow \\
(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E: f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)).
\end{array}
\end{equation*}
\end{definition}
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Une équation d'évolution

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Le problème

Pour  $\rho > 0$ ,  $Q_{\ell} = ]0, T[ \times \Omega_{\ell}$  on considère le problème d'évolution suivant

```
\begin{equation}
\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle \frac{\partial^2 u_{\ell}}{\partial t^2} - \Delta u_{\ell} \\
+ \left| u_{\ell} \right|^{\rho} u_{\ell} = f, \quad \text{dans } Q_{\ell} \\
L^2(Q_{\ell}). \quad \text{et } u_{\ell}|_{\Gamma} = 0 \\
u_{\ell}(0) = 0 \quad \text{et } u_{\ell}'(0) = 0.
\end{array}
\right. \tag{NP}_{\ell} \quad \text{label{pl}}
\end{equation}
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

existence et unicité

On a le théorème suivant (cf. [lio](#))

```
\begin{theorem}
Il existe une solution  $u_{\ell}$  de  $(NP)_{\ell}$  satisfaisant  $\|u_{\ell}\|_{r} = \rho + 2$ 
\begin{equation}
u_{\ell} \in L^{\infty}(0, T; H^1(\Omega_{\ell})) \cap L^r(0, T; L^{\infty}(\Omega_{\ell})) \text{ et } u_{\ell}' \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega_{\ell})).
\end{equation}
On a l'unicité si  $\rho \leq \frac{2}{n-2}$ ,  $\rho$  quelconque si  $n=2$ .
\end{theorem}
```

égalité d'énergie

La solution  $u_{\ell}$  du problème  $(NP)_{\ell}$  satisfait

```
\begin{multline*}
\int_{\Omega_{\ell}} |u_{\ell}'(t)|^2 dx + \int_{\Omega_{\ell}} |\nabla u_{\ell}(t)|^2 dx + \frac{1}{r} \int_{\Omega_{\ell}} |u_{\ell}(t)|^r dx \\
\leq \int_{\Omega_{\ell}} |u_{\ell}^0|^2 dx + \int_{\Omega_{\ell}} |\nabla u_{\ell}^0|^2 dx + \frac{1}{r} \int_{\Omega_{\ell}} |u_{\ell}^0|^r dx
\end{multline*}
```

