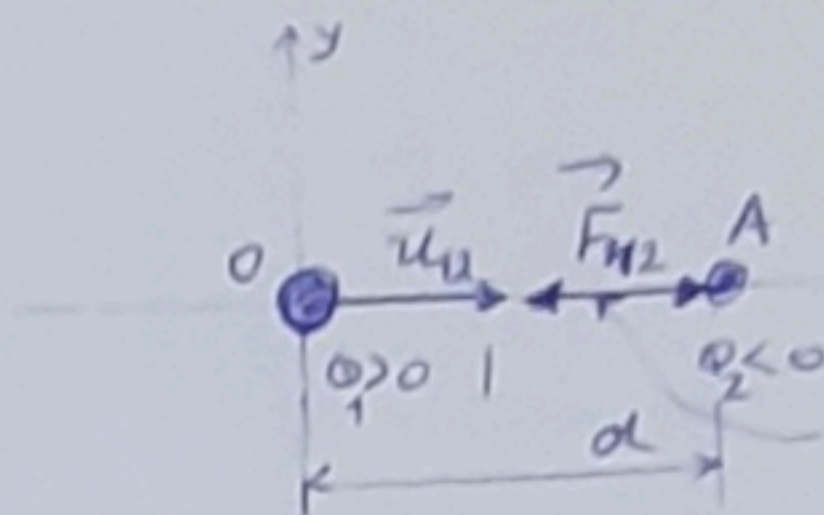


Ex01: Soient deux charges ponctuelles:

$$Q_1 = 9 \mu\text{C} = 9 \cdot 10^{-6} \text{C}, \quad Q_2 = -1 \mu\text{C} = -10^{-6} \text{C}$$

Séparées de $d = 10 \text{ cm}$

1°/ $\left. \begin{matrix} Q_1 > 0 \\ Q_2 < 0 \end{matrix} \right\}$ on a deux charges de signes opposés, la force d'interaction entre ces deux charges est une force d'attraction (attractive)



* Action de Q_1 sur Q_2 : Q_1 : source, Q_2 : cible

le rayon vecteur entre les charges, et orienté de Q_1 vers Q_2

$$\vec{r}_{12} = r_{12} \vec{u}_{12} = d \vec{u}_{12}$$

- si on prend un repère (xoy) où " Q_1 " est à l'origine "o" et Q_2 est au pt A. la force qu'exerce Q_1 sur Q_2 est donnée par la loi de Coulomb:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \vec{u}_{12}$$

\vec{F}_{12} : est dirigée de Q_2 vers Q_1 : (force d'attraction)

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12} \quad \text{car} \quad \vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

or $\vec{r}_{12} = \vec{OA} = r_{12} \vec{u}_{12} = OA \vec{z}$ car $\vec{u}_{12} \equiv \vec{z}$ et $|\vec{OA}| = d$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{d^2} \vec{z} \quad \text{A.N.} \quad \vec{F}_{12} = \frac{9 \cdot 10^9 (9 \cdot 10^{-6}) (-10^{-6})}{(10^{-2})^2} \vec{z}$$

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -8,1 \vec{z} \text{ N}}$$

* Action de Q_2 sur Q_1 : Q_2 : source, Q_1 : cible

Puisque les charges sont de signes opposés on a toujours une attraction

$$\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{21}|^2} \vec{u}_{21}$$

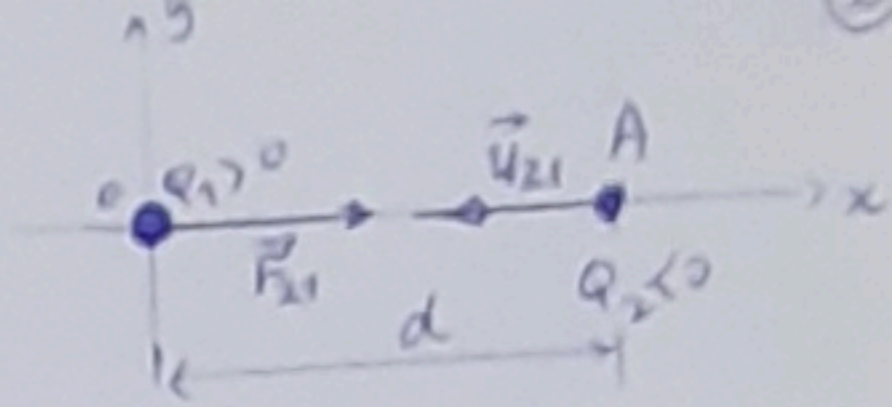
$$\vec{r}_{21} = r_{21} \vec{u}_{21} = \vec{AO} = -d \vec{i} \quad \vec{u}_{21} = -\vec{i}$$

$|\vec{r}_{21}| = d$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{d^2} (-\vec{i}) \quad \text{A.N.}, \quad \vec{F}_{21} = \frac{9 \cdot 10^9 (9 \cdot 10^{-6}) (-10^{-6})}{(10^{-2})} (-\vec{i})$$

$$\boxed{\vec{F}_{21} = 8,1 \vec{i} \text{ N}}$$

on remarque que, $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$: Principe de réciprocité (Loi de Newton)

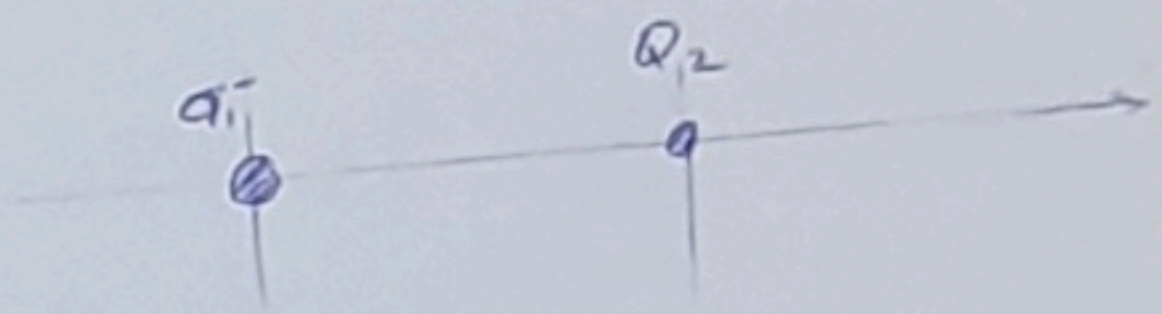


2°/ On divise l'espace en 3 zones

Zone I, Zone à gauche de Q_1

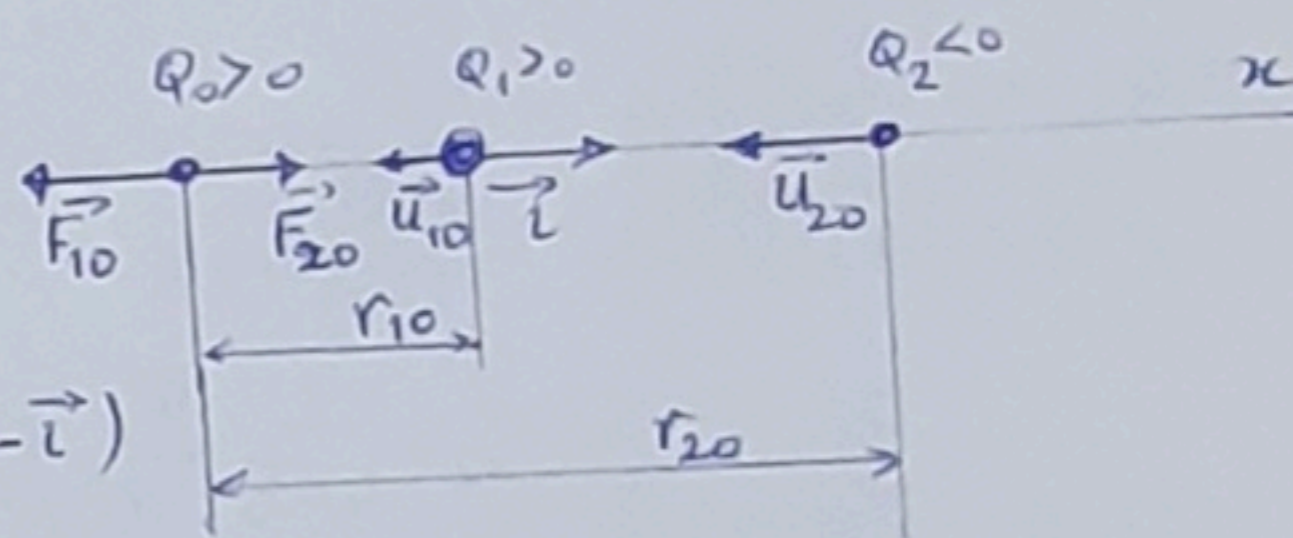
Zone II, Zone entre les deux charges

Zone III, Zone à droite de Q_2



• Zone I: Zone à gauche de Q_1

- $Q_1 > 0$ } deux charges de même
 $Q_0 > 0$ } signes \Rightarrow répulsion



$$\vec{F}_{10} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_0}{r_{10}^2} \vec{u}_{10} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} (-\vec{i})$$

$$\vec{F}_{20} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{10}^2} \vec{i}$$

- $Q_2 < 0$ } deux charges de signes
 $Q_0 > 0$ } opposés $=$ attraction

$$\vec{F}_{20} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_0}{r_{20}^2} \vec{u}_{20} \quad \vec{u}_{20} = -\vec{i}$$

$$\vec{F}_{20} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_2| |Q_0|}{r_{20}^2} \vec{i}$$

\Rightarrow Les deux forces agissantes sur Q_0 due à Q_1 et Q_2 sont de sens opposés, mais

- \vec{F}_{10} : l'emporte sur \vec{F}_{20} du point de vue charge car la force est proportionnelle à la charge et on a $|Q_1| > |Q_2|$

$$F_{10} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_0|}{r_{10}^2} \quad \text{et} \quad F_{20} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2 q_0|}{r_{20}^2} \Rightarrow \boxed{F_{10} > F_{20}}$$

- F_{10} l'emporte aussi sur F_{20} du point de vue de la distance de séparation, car la force de Coulomb est inversement proportionnelle à la distance de séparation "r"

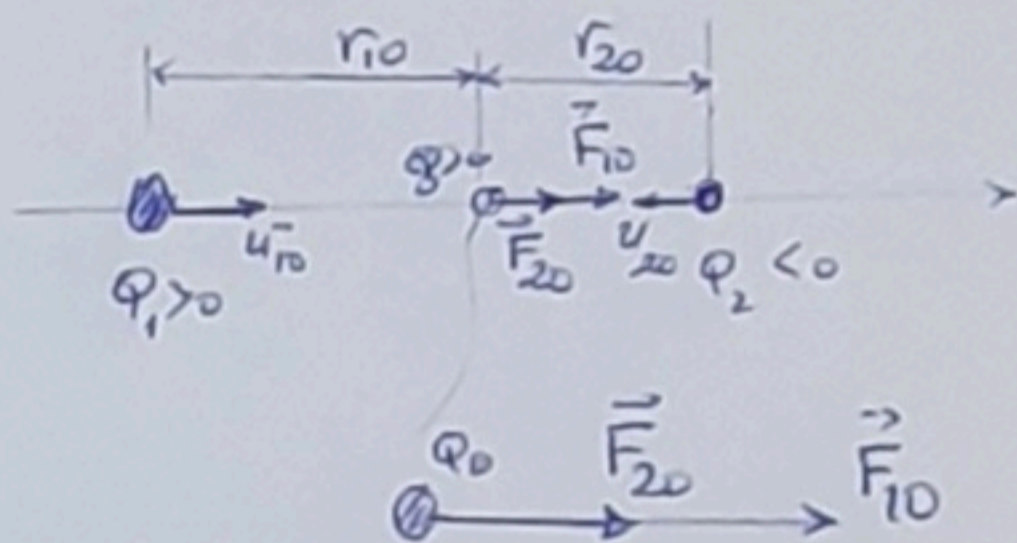
$$r_{10} < r_{20} \quad F_{10} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_0|}{r_{10}^2}, \quad F_{20} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2 q_0|}{r_{20}^2}$$

$$\Rightarrow F_{10} > F_{20}$$

\Rightarrow Dans les deux situations, la force F_{10} est toujours supérieure à F_{20} , malgré que les deux forces sont opposées la résultante n'est jamais nulle $\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} \neq 0 \quad \forall$ et la charge q_0 ne peut pas être en équilibre dans la zone I.

• Zone II: entre les charges q_1 et q_2

- $q_1 > 0$
 $q_0 > 0$ } on a une force de répulsion
 (charges de mêmes signes)



- $q_2 < 0$
 $q_0 > 0$ } on a une force d'attraction
 (charges de signes opposés)

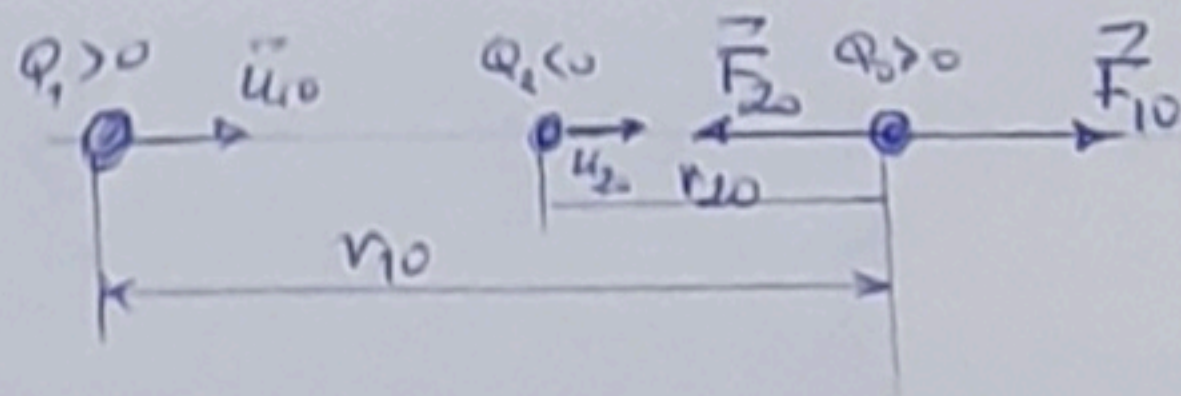
Les deux forces \vec{F}_{10} et \vec{F}_{20} dues aux charges respectivement q_1 et q_2 sont orientés dans le même sens, elles ne font que se renforcer, et la force résultante agissant sur " q_0 " n'est jamais nulle ($\vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} \neq 0$) \forall (q_1 et q_2) aussi (r_{10} et r_{20})

\Rightarrow La charge q_0 n'est jamais en équilibre dans cette zone (Zone II)

• Zone III: à gauche de q_2

- $q_1 > 0$
 $q_0 > 0$ } \Rightarrow répulsion

- $q_2 < 0$
 $q_0 > 0$ } \Rightarrow attraction



- La force F_{10} l'emporte sur F_{20} du point de vue charge
car $|Q_1| > |Q_2|$

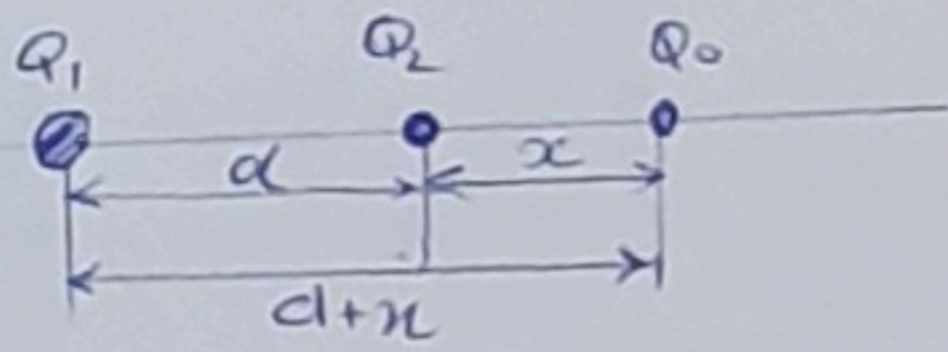
- La force F_{20} l'emporte sur F_{10} du point de vue distance
de séparation. Car $r_{10} > r_{20}$

⇒ La résultante $\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20}$ peut être nulle dans
cette zone, car \vec{F}_{10} et \vec{F}_{20} sont opposés et chacune des
forces l'emporte dans un cas. Or sous certaines
conditions la force résultante est nulle, et la charge Q_0
est en équilibre dans cette zone (Zone III)

⇒ Si la résultante est nulle - $\vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = 0 \Rightarrow F_{10} = F_{20}$

$$\begin{aligned} (Q_1, Q_0) : \vec{F}_{10} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_0}{r_{10}^2} \vec{i} & r_{10} &= d \\ (Q_2, Q_0) : \vec{F}_{20} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_0}{r_{20}^2} \vec{i} & r_{20} &= d+x \end{aligned} \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{10}^2} + \frac{Q_2}{r_{20}^2} \right) \vec{i}$$

$$\vec{F} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{10}^2} + \frac{Q_2}{r_{20}^2} \right) \vec{i} = 0 \Rightarrow \frac{Q_1}{r_{10}^2} + \frac{Q_2}{r_{20}^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9 \cdot 10^{-6}}{(d+x)^2} - \frac{10^{-6}}{x^2} = 0 \Rightarrow 9 = \left(\frac{d+x}{x} \right)^2$$


$$\Rightarrow \frac{d+x}{x} = \pm 3$$

1^{er} cas +3 : $\frac{d+x}{x} = 3 \Rightarrow \frac{d}{x} = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{d}{2} = 5 \text{ cm}}$

- La charge Q_0 peut être en équilibre à droite de la
charge " Q_2 " à une distance $x = 5 \text{ cm}$ (Zone III)

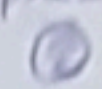
2^{ème} cas -3 : $\frac{d+x}{x} = -3 \Rightarrow \frac{d}{x} = -4 \Rightarrow x = \frac{-d}{4} = -2,5 \text{ cm}$

- La charge " Q_0 " dans ce cas est à gauche de la charge Q_2
c.a.d qu'elle est dans la zone II, or dans cette zone les
deux forces sont de même sens - c.a.d qu'il n'y a pas d'équilibre
et ce n'est jamais nulle et " Q_0 " ne peut pas être en équilibre, de ce
cas $x = -2,5$ est à exclure.

Ex02 : Deux sphères métalliques

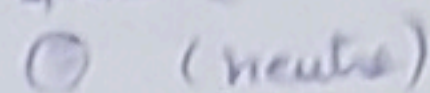
1/ - initialement

sphère 1



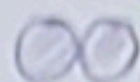
$q_1 = Q$

sphère 2



$Q_2 = 0$

- mise en contact



- après séparation



$Q'_1 = \frac{Q}{2}$



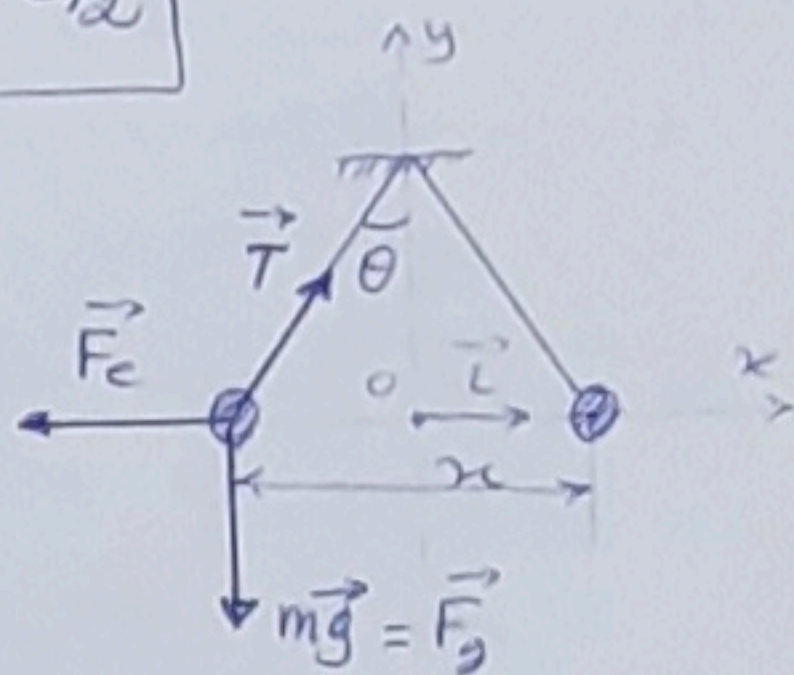
$Q'_2 = \frac{Q}{2}$

- Puisque les sphères sont métalliques, la charge va être répartie sur la surface de la sphère.

mise en contact, la charge de Q de la sphère initialement chargée va être divisée entre les deux sphères de façon équitable et sera répartie ~~sur~~ ~~sur~~ ~~sur~~ les deux surfaces de la sphère équitablement $\Rightarrow Q'_1 = Q'_2 = Q/2$

2/ Puisque les deux sphères portent les mêmes charges, elles vont se repousser avec une force de Coulomb

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (\vec{r})}{x^2} = \vec{F}_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q/2)^2}{x^2} \vec{r}$$



- Les deux sphères ayant des masses identiques

$m_1 = m_2 = m$, elles vont subir des forces d'attraction gravitationnelle

\vec{F}_1 : entre les deux masses : $\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{x^2} \vec{r}$

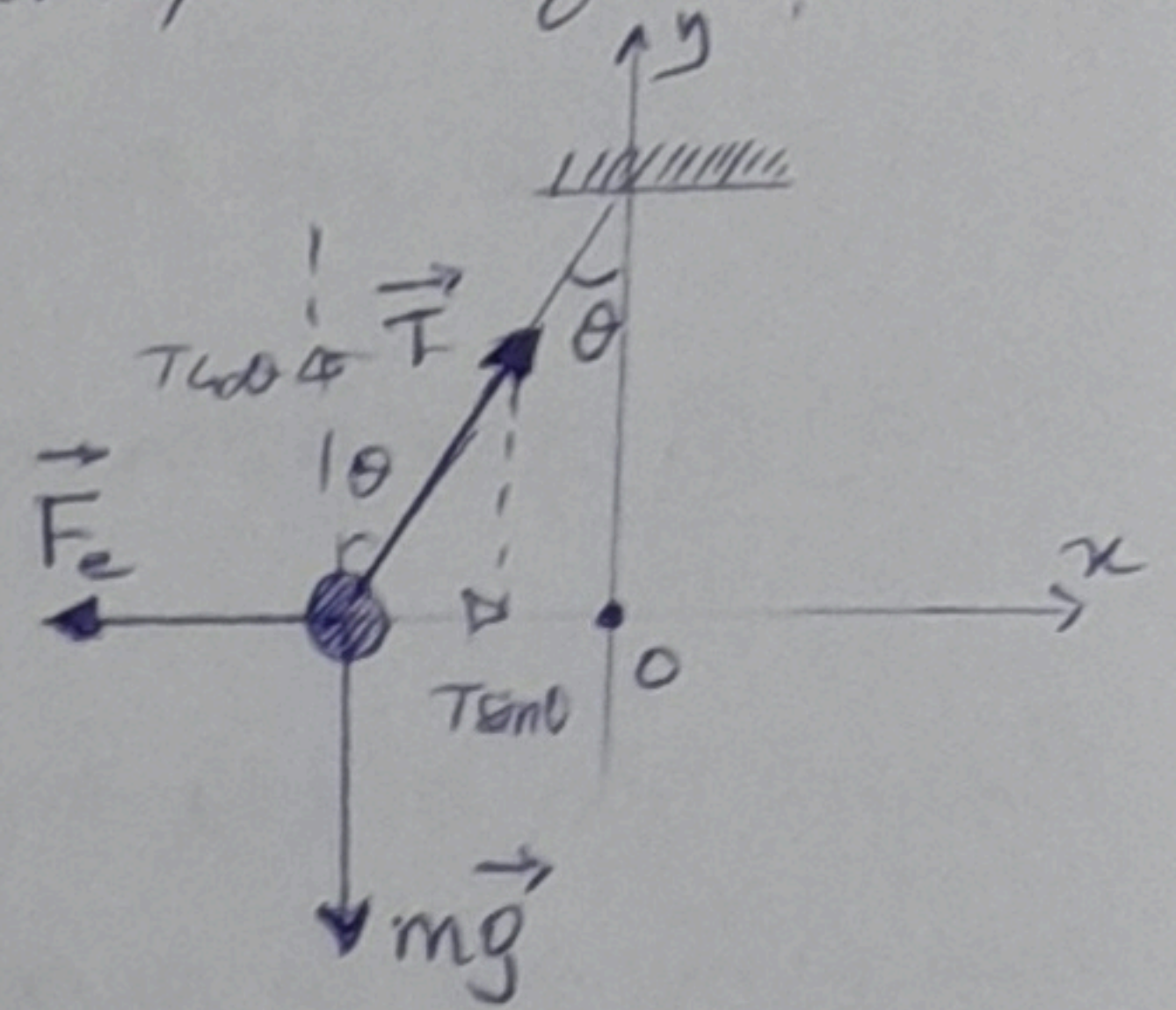
\vec{F}_2 : entre la masse et la terre : $\vec{F}_2 = -G \frac{M m}{R^2} \vec{j} = m_1 \vec{g} = m_2 \vec{g} = m \vec{g}$

- Puisque la masse de la terre est très supérieure aux masses des deux sphères, l'attraction universelle entre les masses est très faible devant l'attraction de la masse et la terre et on ne considère que leurs poids $m \vec{g} = \vec{F}_g$, aussi négligeable devant \vec{F}_e

⑥
 on prend une seule charge, (celle de gauche - pas spécialement), elle est soumise à la force électrostatique \vec{F}_e due à la seconde charge, et le poids $m\vec{g}$, due à l'attraction gravitationnelle et la tension due à la réaction du suspensum par un fil.

- \vec{F}_e : essaye d'éloigner les deux sphères
- \vec{F}_g : essaye de rapprocher les deux sphères

ces deux forces agissent en opposition, il existe donc une situation, où cette charge sera en équilibre.



⇒ La 2nd loi de Newton à l'équilibre est: $\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0}$

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_e = \vec{0}$$

Pour résoudre cette équation vectorielle, on passe aux équations scalaires par projection sur le système de coordonnées adéquat (à l'équilibre le sens n'est pas trop important).

⇒ On prend le système cartésien où la médiane représente l'axe $\vec{o}\vec{y}$ et l'axe $\vec{o}\vec{x}$, suivant la ligne joignant les deux sphères.

Suivant $\vec{o}\vec{x}$: La force électrique va compenser la composante de la tension le long de $\vec{o}\vec{x}$.

$$T \sin \theta - F_e = 0 \quad \Rightarrow \quad T \sin \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4r^2} \quad (1)$$

Suivant $\vec{o}\vec{y}$: Le poids mg va être compensé par la composante de la tension suivant $\vec{o}\vec{y}$.

$$T \cos \theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T \cos \theta = mg \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T \sin \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4x^2} & (1) \\ T \cos \theta = mg & (2) \end{cases}$$

le rapport des deux équations $\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \tan \theta = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 mg x^2}$ (3)

Si l'écartement entre les sphères est faible, on peut approximer

" $\tan \theta$ " à " $\sin \theta$ " : $\tan \theta \approx \sin \theta$

selon la figure : $\tan \theta \approx \sin \theta = \frac{x/2}{a} = \frac{x}{2a}$ (4)

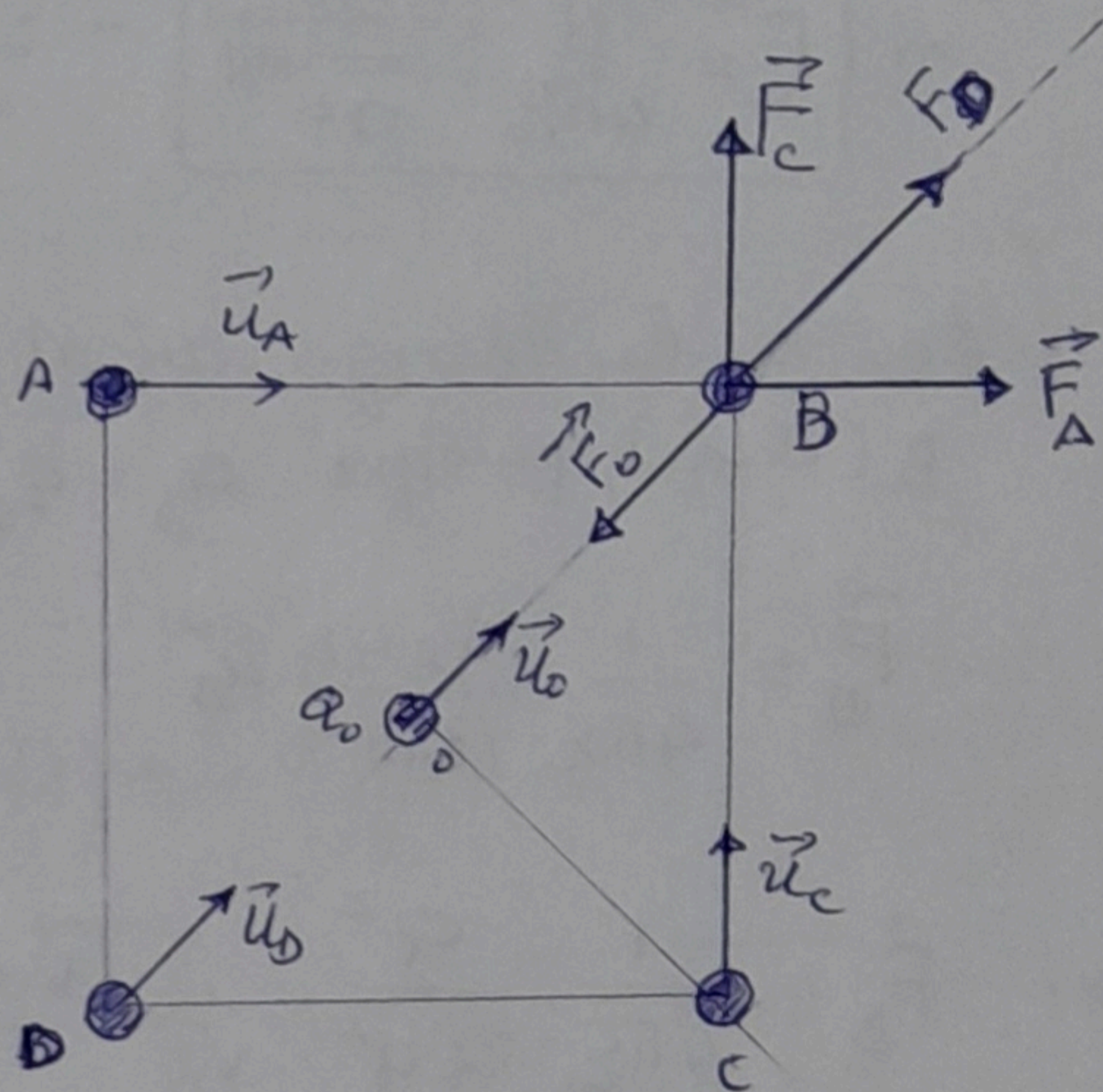
on porte (4) dans (3) $\Rightarrow \tan \theta \approx \sin \theta = \frac{x}{2a} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 mg x^2}$

$\Rightarrow x^3 = \frac{Q^2 a}{8\pi\epsilon_0 mg} \Rightarrow x = \left(\frac{Q^2 a}{8\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3}$ ce qui fallait démontrer.

Exercice 03

1% pour que le système soit en équilibre électrostatique, on utilise le Théorème de Earnshaw qui dit que pour qu'un système soit en équilibre de charges ponctuelles en équilibre électrostatique il faut et il suffit que la force appliquée à chacune des charges du système soit nulle.

Puisque on a une symétrie, il suffit de faire le calcul pour une seule charge qui sera le même pour les autres charges.



- \vec{F}_C : action de la charge au pt C sur la charge au point B
- \vec{F}_A : action de la charge au pt A sur la charge au pt B
- \vec{F}_D : action de la force au pt D sur la charge au pt B
- \vec{F}_0 : action de la charge au pt O sur la charge au pt B

On prend la charge au point "B" qui subit l'action des charges aux points A, C, D, O (8)

- action de la charge au pt "A" (source) sur la charge au pt B (cible), puisque $q_A = q_B = -q$, on a une répulsion

$$\vec{F}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|AB|^2} \vec{u}_A \quad \begin{array}{l} q_A = -q \\ q_B = -q \end{array} \quad \begin{array}{l} |AB| = a \\ \vec{u}_A = \vec{i} \end{array}$$

$$= \boxed{\vec{F}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \vec{i}}$$

- action de la charge au point "C" (source) sur la charge au point B (cible), puisque $q_B = q_C = -q$, on a une répulsion

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B q_C}{|BC|^2} \vec{u}_C, \quad \begin{array}{l} |BC| = a \\ \vec{u}_C = \vec{j} \end{array}$$

$$= \boxed{\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \vec{j}}$$

- action de la charge au pt "D" (source) sur la charge au point B (cible), puisque $q_D = q_B = -q \Rightarrow$ on a une répulsion.

$$\vec{F}_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B q_D}{|BD|^2} \vec{u}_D \quad \begin{array}{l} |BD| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} \\ \vec{u}_D = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j}) \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2a^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j})$$

- Action de la charge au pt "O" (source) sur la charge au pt B (cible), puisque $q_B = -q$ $q_O > 0 \Rightarrow$ on a une attraction

$$\vec{F}_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_O q}{|OB|^2} \vec{u}_O \quad \begin{array}{l} |OB| = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = a/\sqrt{2} \\ \vec{u}_O = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j}) \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_0 = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q Q_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j})}$$

La force totale que subit la charge au pt B.

On applique le principe de superposition

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_A + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_0$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} \vec{i} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} \vec{j} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{2a^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q Q_0}{a^2 \sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j})$$

pour que le système soit en équilibre la force doit être nulle

$$\vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \right) \left[Q(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{Q}{2} \frac{(\vec{i} + \vec{j})}{\sqrt{2}} - \frac{2Q_0}{\sqrt{2}} \frac{(\vec{i} + \vec{j})}{\sqrt{2}} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \right) \left[\left[\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) Q - \frac{2Q_0}{\sqrt{2}} \right] \vec{i} + \left[\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) Q - \frac{2Q_0}{\sqrt{2}} \right] \vec{j} \right] = 0$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = 0$$

$$F = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) Q - \frac{2Q_0}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_0 = \frac{1+2\sqrt{2}}{4} \cdot Q} \Rightarrow \boxed{Q_0 \approx 0,96Q}$$

2° Si on éloigne Q_0 et on la fixe au point $P(0,0, a\sqrt{2})$

La force totale exercée sur Q_0 est égale à la somme des forces qu'exerce chacune des charges au sommets du carré

(Principe de superposition)

- Action de q_A sur q_0 : $q_A < 0$, $q_0 > 0$ ⇒ attractif

$$\vec{F}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q q_0}{|\vec{AP}|^2} \vec{u}_A = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,96 Q^2}{|\vec{AP}|^2} \vec{u}_A$$

- Action de q_B sur q_0 : $q_B < 0$, $q_0 > 0$ ⇒ attractif

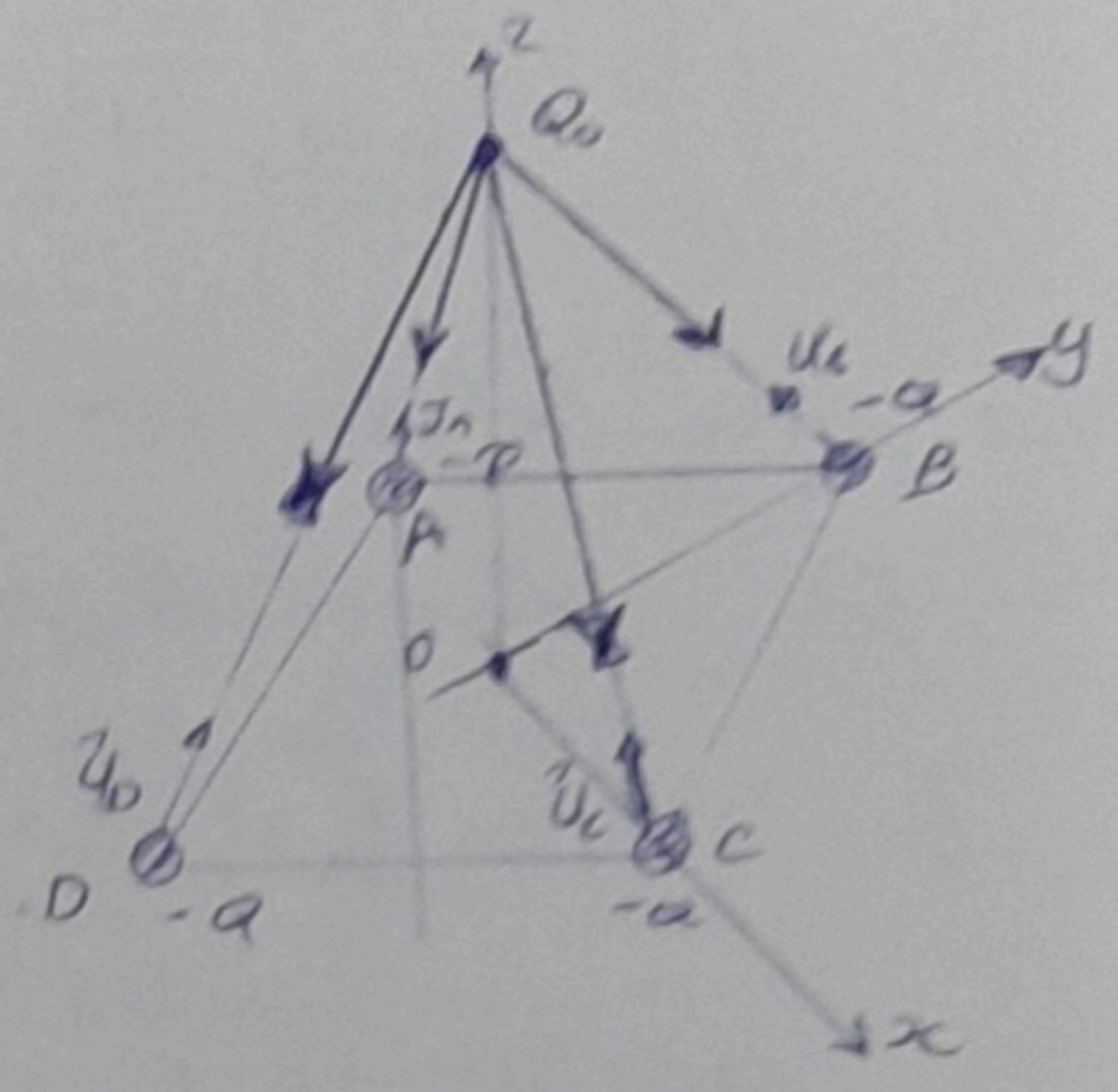
$$\vec{F}_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q q_0}{|\vec{BP}|^2} \vec{u}_B = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,96 Q^2}{|\vec{BP}|^2} \vec{u}_B$$

- Action de q_C sur q_0 : $q_C < 0$, $q_0 > 0$ ⇒ attractif

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q q_0}{|\vec{CP}|^2} \vec{u}_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,96 Q^2}{|\vec{CP}|^2} \vec{u}_C$$

- Action de q_D sur q_0 : $q_D < 0$, $q_0 > 0$ ⇒ attractif

$$\vec{F}_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q q_0}{|\vec{DP}|^2} \vec{u}_D = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,96 Q^2}{|\vec{DP}|^2} \vec{u}_D$$



ou a, $|\vec{AP}| = |\vec{BP}| = |\vec{CP}| = |\vec{DP}| = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = a$

l'angle entre \vec{u}_A et \vec{Ox} est de $\pi/4$ qui est le même que l'angle entre \vec{u}_B et $(\vec{u}_B - \vec{Oy})$ et (\vec{u}_C, \vec{Oz})

⇒ $\vec{u}_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k})$; $\vec{u}_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{j} + \vec{k})$, $\vec{u}_C = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{k})$, $\vec{u}_D = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})$

La force totale: (Principe de superposition)

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = -\left(\frac{0,96 Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\right) [\vec{u}_A + \vec{u}_B + \vec{u}_C + \vec{u}_D] = -\frac{0,96 Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{0,96}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a}\right)^2 \vec{k}}$$

3/ Le champ créé au point P,

La force exercée par les 4 charges des sommets du carré sur q_0 est $\vec{F} = q_0 \vec{E}$: \vec{E} est le champ créé par l'ensemble des 4 charges des sommets du carré, alors

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{F}{0,96 Q} = -\frac{Q^2 \vec{k}}{\pi\epsilon_0 a^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \vec{k}}$$