Solution de la série 3
Proposé par Dr. Baadji

Exercice 1

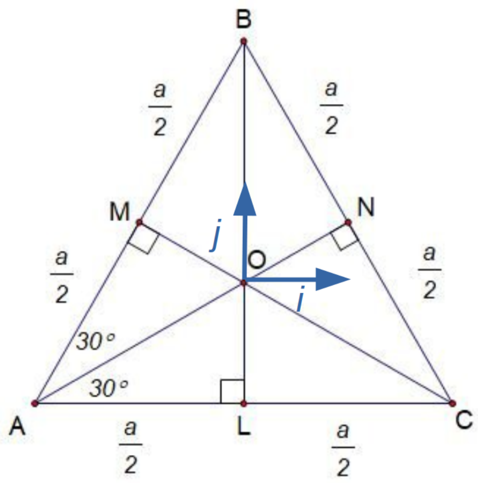

Figure 1: Triangle équilatteral .

Si on considère que le centre de triangle équilatteral coïncide avec l'origine et la charge Q_3 (point B) se trouve sur l'axe y, on doit déterminer les coordonnées des sommets pour cela on a $x_C = -x_A = \dfrac{a}{2}$ et

$$\tan(\widehat{LAO}) = \frac{-y_A}{a/2} \Longrightarrow y_A = -\frac{a}{2\sqrt{3}} = y_C$$

pour le point B on $x_B = 0$ et

$$\cos(\widehat{MBO}) = \frac{a/2}{y_B} \Longrightarrow y_B = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

donc les trois sommets sont situés aux points

$$A(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}}) \quad B = (0, \frac{a}{\sqrt{3}}) \quad C = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}})$$

et les distance sont

$$d_{OA} = d_{OB} = d_{OC} = d = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Les champ électriques sont notés

$$\vec{E}_A = \frac{akq_1}{d^3}(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{j})$$

$$\vec{E}_C = \frac{akq_2}{d^3}(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{j})$$

et

$$\vec{E}_B = \frac{akq_3}{d^3}(-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j})$$

pour finalement

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C = \frac{3kQ}{a^2}\left(-\sqrt{3}\vec{i} + 2\vec{j}\right)$$

Pour le potentiel on a

$$\vec{V}_A = \frac{kq_1}{d} = \frac{kQ}{d}$$

$$\vec{V}_B = \frac{kq_2}{d} = -2\frac{kQ}{d}$$

et

$$\vec{V}_C = \frac{kq_3}{d} = 3\frac{kQ}{d}$$

pour finalement

$$V = \frac{2\sqrt{3}kQ}{a} + C$$

Exercice 2

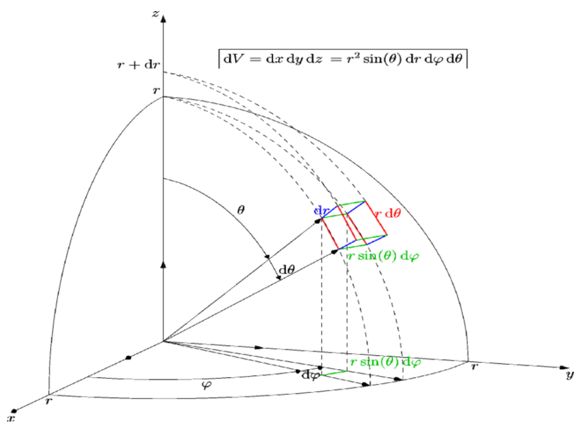

Figure 2: Elément de volume dans les coordonnées sphériques.

Si on considère l'élément de volume dans les coordonnées sphériques $dV = r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi$ contient une charge élémentaire $dq = \rho dV$ et donc la charge totale est

$$Q = \int_V dq = \iiint\limits_V \rho r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi \quad R_1 \le r \le R_2 \; 0 \le \vartheta \le \pi \; 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$Q = \rho \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 dr \cdot \int\limits_0^{\pi} \sin(\vartheta) d\vartheta \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi$$

aprés intégration on obtient

$$Q = \frac{4\pi\rho}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right) = \rho V$$

Exercice 3

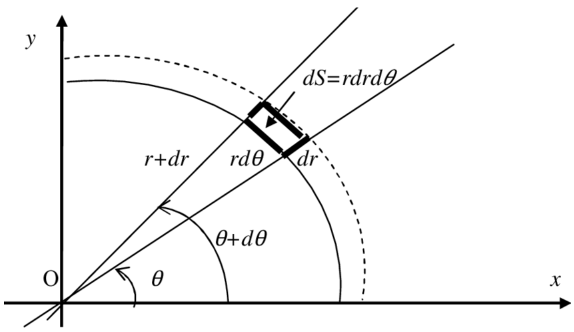

Figure 3: Elément de surface dans les coordonnées polaires.

Si on considère l'élément de surface dans les coordonnées polaires $ds = r dr d\vartheta$ contient une charge élémentaire $dq = \sigma ds = \alpha r^2 ds$ et donc la charge totale est

$$Q = \int_S dq = \iint\limits_S \alpha r^3 dr d\vartheta \quad 0 \le r \le a \; 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

$$Q = \alpha \int\limits_0^{a} r^3 dr \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta$$

aprés intégration on obtient

$$Q = \frac{\pi \alpha a^4}{2}$$

Exercice 4

Pour calculer le champ électrique $\vec{E}$ on considère un élément de surface du disque $ds = rdrd\vartheta$ contient une charge élémentaire $dq = \sigma ds$ autour d'un point P $(x, y, 0)$ ou en coordonnées cylindriques $(\rho, \vartheta, 0)$ qui produit un champ infinitésimal

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|}$$

En coordonnées cylindriques

$$\vec{PM} = -\rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$$

et donc on a

$$d\vec{E} = \frac{\sigma\rho d\rho d\vartheta}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{-\rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et par conséquence

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_D \rho d\rho d\vartheta \frac{-\rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iint\limits_D d\rho d\vartheta \frac{-\rho^2\vec{u}_\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + z\vec{k}\iint\limits_D \frac{\rho d\rho d\vartheta}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

On calcule chaque intégrale séparement

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_D d\rho d\vartheta \frac{-\rho^2\vec{u}_\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^R d\rho d\vartheta \frac{-\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \left(\cos(\vartheta)\vec{i} + \sin(\vartheta)\vec{j}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{E}_2 &= z\vec{k}\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_D \frac{\rho d\rho d\vartheta}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= z\vec{k}\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

et donc

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\vec{k}$$

qui se reduit a

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$

pour $R \longrightarrow \infty$

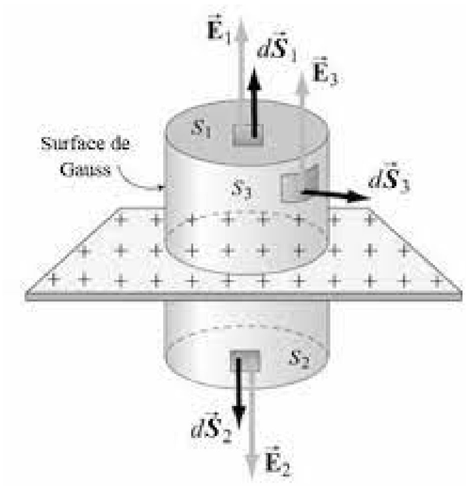

Figure 4: Surface de Gauss.

On trace un cylindre de Gauss de même rayon du disque et d'hauteur $2z$ contenant le point M sur sa surface superieure et donc le flux de la composante selon l'axe $\vec{k}$ est donnée par

$$\Phi = \iint_S \vec{E}.d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}_1.d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2.d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3.d\vec{S}_3$$

$$\Phi = (E_1 + E_2)\,S + 0 = 2ES$$

Comme les deux bases du cylindre sont placées à égales distances du plan. En vertu du théorème de Gauss, on aura

$$\Phi = 2ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

mais $Q = \sigma S$ due à une distribution de charge uniforme donc

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Le potentiel electrique $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int dz$

$$V = -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}$$

Exercice 5 (DM)

Le flux de champ électrique est

$$\Phi = \iint_S \vec{E}.d\vec{S} = E.S = 4\pi r^2 E$$

on distingue trois cas

1. $r < R_1$ il n'y a pas de charge à l'intérieur de la surface de Gauss et par conséquence $E = 0$
2. $R_1 \leq r \leq R_2$ la charge incluse dans la surfce de Gauss est

$$Q = \frac{4\pi\rho}{3}(r^3 - R_1^3)$$

   et donc

$$E = \rho\frac{r^3 - R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

3. $r \geq R_2$ la charge total incluse est $Q = \rho\frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)$ et

$$E = \rho\frac{R_2^3 - R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

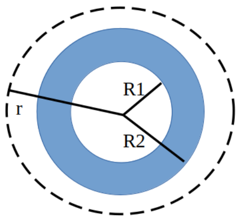

Figure 5: Surface de Gauss en pointillé .

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

1. $r < R_1$ $V = V_1(r) = C_1$
2. $R_1 \leq r \leq R_2$

$$V = V_2(r) = -\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_2$$

3. $r \geq R_2$

$$V = V_3(r) = \rho\frac{R_2^3 - R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + C_3$$

les constantes C_1, C_2 et C_3 sont déterminées par la continuité du potentiel et la condition initial. Comme $V(r \longrightarrow \infty) = 0$ donc $C_3 = 0$ et grace aux équations de continuité $V_1(R_1) = V_2(R_1)$ et $V_2(R_2) = V_3(R_2)$ on obtient $C_2 = \rho\dfrac{R_2^2}{2\varepsilon_0}$ et $C_1 = \rho\dfrac{R_2^2}{2\varepsilon_0} - \rho\dfrac{R_1^2}{2\varepsilon_0}$