Université de M'sila

Faculté de : Technologie — **Socle commun**

Série de TD N°01- Phys 02

Exercice 01 :

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, *on donne la fonction scalaire* $F(x,y,z) = 3yx^2 - y^3z^2$

1°/ *Déterminer les dérivées partielles* $\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y};\frac{\partial F}{\partial z}$ *de* F .

2°/ *Déduire le gradient de la fonction* $F(x,y,z)$ $(\vec{\nabla}F)$ *au point* $P(1,-2,-1)$.

3°/ *Déterminer la normale à la surface* $F(x,y,z) = 0$ *au point* $Q(1,1,1)$.

4°/ *Déterminer la dérivée directionnelle au point* $Q(1,1,1)$ *dans la direction* $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$.

Exercice 02 :

Soit la fonction vectorielle $\vec{G}(x,y,z) = xyz\vec{\imath} + 3x^2y\vec{\jmath} + (xz^2 - y^2z)\vec{k}$

1°/ *Calculer la divergence de* $(\vec{\nabla}\circ\vec{G})$ *au point* $P(2,-1,1)$.

2°/ *Calculer le rotationnel de* $(\vec{\nabla}\wedge\vec{G})$ *au point* $P(2,-1,1)$.

3°/ *Donner la valeur de* a *pour que la fonction vectorielle* $\vec{A} = (2x-y)\vec{\imath} + (z+y)\vec{\jmath} + (1-a)\vec{k}$ *soit un champ solénoïdal.*

4°/ *Quelles sont les valeurs* (a,b,c) *pour que le champ vectorielle* $\vec{B}$ *soit irrotationnel*

On donne : $\vec{B} = (2z+ay)\vec{\imath} + (x-bz)\vec{\jmath} + (y+cx)\vec{k}$

Exercice 03 : (Supplémentaire)

Soit la fonction vectorielle $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

1°/ *Montrer que* $\vec{\nabla}(r) = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{u}_r$ *(* $\vec{u}_r$ *est le vecteur unitaire de* $\vec{r}$*).*

2°/ *Montrer que* $\vec{\nabla}(r^n) = n.r^{(n-2)}\vec{r}$. *En déduire le gradient de* $\frac{1}{r}$.

3°/ *Montrer que* $\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{A}\wedge\vec{r}}{r^n}\right) = \frac{2-n}{r^n}\vec{A} + \frac{n}{r^{(n+2)}}(\vec{A}\circ\vec{r})\vec{A}$ *où* $\vec{A}$ *est un vecteur constant.*

Exercice 04 :

1°/ *Vérifier le théorème de STOKES pour le champ vectoriel* $\vec{A}$ *pour l'aire du triangle de la figure 5.1.* : $\vec{A} = xy\vec{\imath} + 2yz\vec{\jmath} + 3xz\vec{k}$

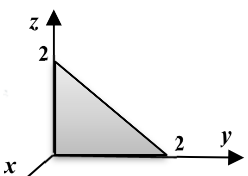

Fig. 5.1

L. Laïssaoui

2°/ *Vérifier le théorème de GAUSS le champ vectoriel* $\vec{B}$ *pour l'hémisphère nord de la sphère de rayon* R *délimitée par le plan équatorial. figure 5.2*

$$\vec{B} = r.\cos(\theta)\vec{u}_r + r.\sin(\theta)\vec{u}_\theta + r.\sin(\theta).\cos(\varphi)\vec{u}_\varphi$$

(On donne $:\nabla \circ \vec{A} = \frac{1}{r^2}.\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$*)*

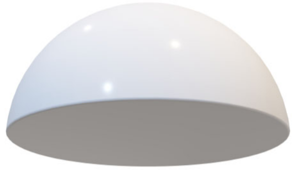

Fig. 5.2

Exercice 05 : (Supplémentaire)

Sachant que :
$$\begin{cases} div(\vec{a}f) = f div(\vec{a}) + \vec{a} \circ \overrightarrow{grad}(f) = \nabla \circ (\vec{a}f(r)) = f\nabla \circ \vec{a} + \vec{a} \circ \nabla f \\ \overrightarrow{rot}(\vec{a}f) = f\overrightarrow{rot}(\vec{a}) + \vec{a}\wedge\overrightarrow{grad}(f) = \nabla\wedge(\vec{a}f(r)) = f\nabla\wedge\vec{a} + \vec{a}\wedge\nabla f \end{cases}$$

1°- *Montrer que* $\nabla\wedge(\vec{r}f(r)) = 0$

2°- *Montrer les égalités suivantes* :($\overrightarrow{rot} \equiv \vec{\nabla}\wedge$; $\overrightarrow{grad} \equiv \vec{\nabla}$; $div \equiv \vec{\nabla}\circ$; $\Delta \equiv \vec{\nabla}\circ\vec{\nabla}$)

- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}) = 0$; $\quad div(\overrightarrow{grad}) = \Delta$; $\quad div(\overrightarrow{rot}) = 0$
- $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\circ\vec{A}) - \Delta\vec{A}$, $\quad \vec{\nabla}\circ(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\circ\vec{\nabla}\wedge\vec{A} - \vec{A}\circ\vec{\nabla}\wedge\vec{B}$, $\quad \vec{\nabla}(UV) = V\vec{\nabla}U + U\vec{\nabla}V$
- $\vec{\nabla}(\vec{A}\circ\vec{B}) = \vec{A}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) + \vec{B}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) + (\vec{B}\circ\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\circ\vec{\nabla})\vec{B}$
- $\vec{\nabla}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\circ\vec{B}) - (\vec{A}\circ\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}(\vec{\nabla}\circ\vec{A}) - (\vec{B}\circ\vec{\nabla})\vec{A}$

Exercice 06 : (D.M)

- *Soit la fonction* $f(x,y) = xy$,

1°- *Calculer l'intégrale de surface dans le domaine* $x = 0, x = a$ *et* $y = 0, y = x$.

- *Si* $f(x,y) = 1$,

2°- *Calculer son intégrale sur la surface d'une sphère de rayon* " R "

3°- *Calculer son intégrale sur le volume d'une sphère de rayon* " R "

- *On donne le vecteur de symétrie sphérique* $\vec{A} = a\vec{r}$.

1°/ *Quelle son flux à travers une sphère de rayon* 'R' ? *(Utiliser le théorème de GAUSS).*

2°/ *Quel est l'intégrale curviligne le long d'une courbe circulaire d'équation* $x^2 + y^2 = a^2$; $z = 0$ *si le champ est une fonction* $\vec{A}(x,y,z) = \sin(y)\vec{i} + x(1 + \cos(y))\vec{j}$.

(Utiliser le théorème de STOKES).

L. Laïssaoui