Exo1 : Soit la fonction (champ) scalaire $F(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$

1°/ Les dérivées partielles, sont des dérivées par rapport à la variable considérée, en considérant que les autres variables sont des constantes.

- $\frac{\partial F}{\partial x}$: est la dérivée partielle par rapport à la variable "x" alors que les variables "y" et "z" sont des constantes.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^3z^2) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(y^3z^2) = 6xy - 0$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = 6xy}$$

- $$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - y^3z^2) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3z^2) = 3x^2 - 3y^2z^2$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} = 3(x^2 - y^2z^2)}$$

- $$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y - y^3z^2) = \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(y^3z^2) = 0 - 2y^3z$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial z} = -2y^3z}$$

2°/ Gradient de $F(x,y,z)$: Le gradient d'un champ (f^{ct}) scalaire est donné par : $\vec{\nabla}F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} = \overrightarrow{grad}(F)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}F = 6xy\,\vec{i} + 3(x^2 - y^2z^2)\,\vec{j} - 2y^3z\,\vec{k}}$$

• au point $P(1,-2,1)$, $x=1$; $y=-2$, $z=1$

$$\vec{\nabla}F(1,-2,1) = 6\cdot(1)(-2)\vec{i} + 3\left[1^2-(-2)^2(1)^2\right]\vec{j} - 2(-2)^3(1)^2\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}F(1,-2,1) = -12\vec{i} - 9\vec{j} - 16\vec{k}}$$

3°/ Le gradient est toujours orienté le long de la normale de la fonction (surface):

$\vec{\nabla}F = |\vec{\nabla}F|.\vec{n}$ $\quad\vec{n}$: est la normale à la surface

au point $Q(1,1,1)$, $\vec{\nabla}F(1,1,1) = 6.1.1\,\vec{i} + 3(1^2-1^2.1^2)\vec{j} - 2.1^3.1$

$\vec{\nabla}F(1,1,1) = 6\vec{i} - 2\vec{k} \Rightarrow |\vec{\nabla}F| = \sqrt{6^2+2^2} = 2\sqrt{10}$

alors $\vec{n} = \dfrac{\vec{\nabla}F}{|\vec{\nabla}F|} = \dfrac{1}{2\sqrt{10}}\left(6\vec{i} - 2\vec{k}\right)$: $\boxed{\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3\vec{i} - \vec{k})}$: $\vec{n}\begin{pmatrix} 3/\\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

4°/ La dérivée directionnelle d'une fonction, est la projection de son gradient, le long de la direction considérée.

$\dfrac{dF}{du} = \vec{\nabla}F.\vec{u}_n$ au point $Q(1,1,1)$: $\vec{\nabla}F(1,1,1) = 6\vec{i} - 2\vec{k}$

et $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

$\vec{u}_n = \vec{u}/|\vec{u}|$

$$\Rightarrow \frac{dF}{du} = (6\vec{i} - 2\vec{k})\circ\left(\frac{\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6+2}{\sqrt{3}} = 8/\sqrt{3}$$

$$\boxed{\frac{dF}{du} = \frac{8}{\sqrt{3}}}$$

car $\vec{u} = i - \vec{j} - \vec{k}$ est le vecteur unitaire dans cette direction et $\vec{u}_n = \vec{u}/|\vec{u}|$

Ex02 : Soit la fonction (Champ) vectorielle $\vec{G}$ /

$$\vec{G} = xyz\,\vec{i} + 3x^2y\,\vec{j} + (xz^2 - y^2z)\,\vec{k}$$

1°/ La divergence d'une fonction vectorielle et donné par :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = \operatorname{div}\vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

$$\vec{G} = G_x\vec{i} + G_y\vec{j} + G_z\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} G_x = xyz \\ G_y = 3x^2y \\ G_z = xz^2 - y^2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial G_x}{\partial x} = yz \\ \frac{\partial G_y}{\partial y} = 3x^2 \\ \frac{\partial G_z}{\partial z} = 2xz - y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = yz + 3x^2 + 2xz - y^2}$$

au point $P(2,-1,1)$: $\begin{pmatrix} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{G}(2,-1,1) = (-1)(1) + 3(2)^2 + 2(2)(1) - (-1)^2 = 14$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{G}(2,-1,1) = 14}$$

2°/ Le rotationnel d'une fonction scalaire et donné par :

$$\vec{rot}\,\vec{G} = \vec{\nabla}\wedge\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial G_z}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\wedge\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xyz & 3x^2y & xz^2 - y^2z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-2yz - 0\right) - \vec{j}\left(z^2 - xy\right) + \vec{k}\left(6xy - xz\right.$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\wedge\vec{G} = -2yz\,\vec{i} + (xy - z^2)\,\vec{j} + (6xy - xz)\,\vec{k}}$$

au point $P(2,-1,1)$:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{G}(2,-1,1) = -2(-1)(1)\vec{i} + \left[2(-1) - 1^2\right]\vec{j} + \left[6.2(-1) - 2.1\right]\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{G}(2,-1,1) = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 14\vec{k}}$$

3°/ $\vec{A} = (2x-y)\vec{i} + (z+y)\vec{j} + (1-a)z\,\vec{k}$

Pour que le champ $\vec{A}$ soit solénoïdal, il faut que sa divergence soit nulle. $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \qquad \begin{cases} A_x = 2x-y \\ A_y = z+y \\ A_z = (1-a)z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial A_x}{\partial x} = 2 \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial A_z}{\partial z} = 1-a \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 2 + 1 + 1 - a = 0 \quad \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

Pour que $\vec{A}$ soit un champ solénoïdal, il faut que, $\underline{a = 4}$

4°/ Soit $\vec{B} = (2z+ay)\vec{i} + (x-bz)\vec{j} + (y+cx)\vec{k} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$

$$\begin{cases} B_x = 2z + ay \\ B_y = x - bz \\ B_z = y + cx \end{cases} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2z+ay & x-bz & y+cx \end{vmatrix}$$

• Pour que le champ $\vec{B}$ soit irrotationnel il faut que : $\underline{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0}}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = (1+b)\vec{i} - (c-2)\vec{j} + (1-a)\vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+b = 0 \\ c-2 = 0 \\ 1-a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

: $\vec{A}$: irrotationnel
$a = 1, \ b = -1, \ c = 2$