LES INTÉGRALES

0.1 Motivation

Nous allons introduire l'intégrale à l'aide d'un exemple. Considérons la fonction exponentielle $f : x \mapsto e^x$. On souhaite calculer l'aire A en-dessous du graphe de f et entre les droites d'équation $x = 0,\ x = 1,$ et l'axe (Ox).

Nous approchons cette aire par des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe. Plus précisément, soit $n \geq 1$ un entier ; découpons notre intervalle $[0, 1]$ à l'aide de la subdivision $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{i}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1)$. Chaque intevalle pour une base $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ et pour hauteur $f(\frac{i-1}{n}) = e^{\frac{i-1}{n}}, \quad i = 1, ..., n$. Alors l'aire de chaque rectangle égale

$$(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}).e^{\frac{i-1}{n}} = \frac{1}{n}.e^{\frac{i-1}{n}}$$

La somme des aires des se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

On considère les «rectangles inférieurs» A_{inf}

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}(e^{\frac{1}{n}})^{i-1} = \frac{1}{n}.\frac{1-(e^{\frac{1}{n}})^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}(e-1) \longrightarrow (e-1) \text{ lorsque } n \to +\infty$$

Maintenant les «rectangles supérieurs» A_{sup}, ayant la même base $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ mais la hauteur $f(\frac{i}{n}) = e^{\frac{i}{n}}$. Un calcul similaire montre que $\sum_{n=1}^{n} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n} \longrightarrow (e-1)$ lorsque $n \to +\infty$

L'aire A de notre région est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs ; et elle est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs. Lorsque l'on considère des subdivisions de plus en plus petites (c'est-à-dire lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$) alors on obtient à la limite que l'aire A de notre région est encadrée par deux aires qui tendent vers $e - 1$. Donc l'aire de notre région est $A = e - 1$.

0.2 L'intégrale de Riemann

Pour une fonction quelconque définie sur un intervalle $[a, b]$. On reprendre la construction faite, comme précédent. Ce qui va remplacer les rectangles seront des *fonctions en escalier*.

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

Si la limite des aires en-dessous égale la limite des aires au-dessus on appelle cette limite commune **l'intégrale** de f que l'on note

$$\int_a^b f(x)dx$$

Remarque 0.2.1 *Il n'est pas toujours vrai que ces limites (c'est-à-dire, la limite des aires en-dessous et la limite des aires au-dessus) soit égales, l'intégrale n'est donc définie que pour les fonctions intégrables. Heureusement nous verrons que si la fonction f est continue alors elle est intégrable.*

0.2.1 L'intégrale d'une fonction escalier

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $(-\infty < a < b < +\infty)$. On appelle une subdivision de $[a, b]$ une suite finie, strictement croissante, de nombres $x_0, x_1, ..., x_n$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < ..., x_n = b$$

Définition 0.2.2 *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction escalier s'il existe une subdivision $x_0, x_1, ..., x_n$ et des nombres réels $c_1, c_2, ..., c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ on ait*

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad f(x) = c_i$$

Autrement dit f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.

Définition 0.2.3 *Pour une fonction en escalier, son intégrale est le réel $\int_a^b f(x)$ défini par*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

Remarque :
Notez que chaque terme $c_i(x_i - x_{i-1})$ est l'aire du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i. Il faut juste prendre garde que l'on compte l'aire avec un signe $(+)$ si $c_i > 0$ et un signe $(-)$ si $c_i < 0$.
L'intégrale d'une fonction en escalier est bien un nombre réel qui mesure l'aire algébrique (c'est-à-dire avec signe) entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

0.2.2 Fonction intégrable

Rappelons qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] : -M \leq f(x) \leq M.$$

Rappelons aussi que si l'on a deux fonctions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ alors on note

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in [a, b] : \quad f(x) \leq g(x)$$

On suppose à présent que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée quelconque. On définit deux nombres réels :

$$I^-(f) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1})$$

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

$$I^+(f) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1})$$

Pour $I^-(f)$ on prend toutes les fonctions en escalier (avec toutes les subdivisions possibles) qui restent inférieures à f. On prend l'aire la plus grande parmi toutes ces fonctions en escalier, comme on n'est pas sûr que ce maximum existe on prend la borne supérieure. Pour $I^+(f)$ c'est le même principe mais les fonctions en escalier sont supérieures à f et on cherche l'aire la plus petite possible.

Définition 0.2.4 *Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable (au sens de Riemann) si $I^-(f) = I^+(f)$. On appelle alors ce nombre l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ et on le note*

$$\int_a^b f(x)dx$$

Exemple 0.2.5 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$. Montrons qu'elle est intégrable et calculons $\int_0^1 f(x)dx$. Soit $n \geq 1$ et considérons la subdivision régulière de $[0,1]$ suivante $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{i}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1)$. Sur l'intervalle $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ nous avons*

$$\forall x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] : \quad (\frac{i-1}{n})^2 \leq x^2 \leq (\frac{i}{n})^2.$$

$$I^+(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$I^-(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^2}(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} (i-1)^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

Lorsque l'on fait n tendre vers $+\infty$ alors $I^+(f), I^-(f)$ tendent vers $\frac{1}{3}$. On déduit que $I^+(f) = I^-(f) = \frac{1}{3}$. Ainsi f est intégrable et $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

Théorème 0.2.6 *Une condition suffisante pour q'une fonction soit Rieman-intégrable est qu'elle soit continue, ou continue par morceaux*

0.2.3 Propriétés de l'intégrale

— **Linéarité** : L'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,b]$. c'est-à-dire

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall f, g \text{ intégrables} : \int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

—

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

— **Relation de Chasles** :

$$\forall c \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

— **Positivité** :
$$(\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0) \Rightarrow (\int_a^b f(x)dx) \geq 0.$$
De plus si
$$(f\text{continue sur}[a,b], f \neq 0; \forall x \in [a,b], f(x) \geq 0) \Rightarrow (\int_a^b f(x)dx) > 0.$$
— **Croissance** : soit f, g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Si
$$\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x) \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$
— **Formule de la moyenne** : Soit f intégrable sur $[a,b]$, m, M les bornes de f sur $[a,b]$, $(m \leq M)$; il existe un réel α de $[m,M]$ tel que
$$\int_a^b f(x)dx = \alpha(b-a).$$
Il résute que si f est continue sur $[a,b]$, il existe un réel c de $[a,b]$ tel que
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$
— Soit f intégrable sur $[a,b]$ alors
$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$
— **Inégalité de Cauchy Schwarz** : si f et g sont continues sur $[a,b]$ on à l'inégalité
$$(\int_a^b f(x)dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

0.3 Primitive

Définition 0.3.1 *Nous dirons que F est une primitive de f, si et seulement si, f est la dérivée de F.*

Remarque 0.3.2
— *Soit f une fonction continue sur un intervalle I alors f admet sur I des primitives.*
— *La différence entre deux primitives de f est une constante. (résultat faux si I n'est pas un intervalle)*
— *Si x_0 est un élément de I il existe une unique primitive de f nulle en x_0 :*
$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$
Par exemple :
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$
— *Le calcule d'une intégrale se ramène alors au calcul des primitives. On trouvera à la fin de ce chapitre un tableau des primitives usuelles à connaitre par coeur.*
— *Si f est une fonction continue sur I, nous notons $\int f(x)dx$ une primitive de f sur I.*

Pour trouver une primitive d'une fonction f on peut avoir la chance de reconnaître que f est la dérivée d'une fonction bien connue. C'est malheureusement très rarement le cas, et on ne connaît pas les primitives de la plupart des fonctions. Cependant nous allons voir deux techniques qui permettent des calculer des intégrales et des primitives : l'intégration par parties et le changement de variable.

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

0.3.1 Intégration par parties

Théorème 0.3.3 *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$.*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

0.3.2 Changement de variable

Théorème 0.3.4 *Soient u une fonction définie sur I et $v : J \to I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $a, b \in J$*

$$\int_a^b u(v(t))v'(t)dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u(x)dx$$

En effet si l'on note $x = v(t)$ alors par dérivation on obtient $dx = v'(t)dt$. D'où la substitution $\int_a^b u(v(t))v'(t)dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u(x)dx$

0.3.3 Intégration des fonctions rationnelles

Soit $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, où $P(x), Q(x) \neq 0$ sont des polynômes à coefficients réels. On doit décomposé cette fraction en éléments simple de $1-$ère espèce sous la forme

$$x \mapsto \frac{A}{(x-a)^n}$$

et de $2-$ème espèce sous la forme

$$x \mapsto \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}$$

où $A, B, a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Cependent avant cette décomposition les deux règles suivantes doit vérifiées

1. Si $\mathring{d}(P(x)) \geq \mathring{d}(Q(x))$ on doit faire la division euclidienne

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} / \quad \mathring{d}(R(x)) < \mathring{d}(Q(x))$$

2. En suite on décompose la fraction $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ c'est-à-dire on doit mettre $Q(x)$ en produit de facteurs
   - Facteur de $1-$ère degré non répéter.
   - Facteur de $1-$ère degré répéter n fois.
   - Facteur de $2-$ème degré non répéter.
   - Facteur de $2-$ème degré répéter n fois.

Par exemple :

On décompose en fractions simples la fraction suivante : $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)^2(x^2+1)}$

- $x-1$ facteur de $1-$ère degré non répéter.
- $(x-2)^2$ facteur de $1-$ère degré répéter 2 fois.
- x^2+1 facteur de $2-$ème degré non répéter.

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

Alors $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2} + \dfrac{Dx+E}{x^2+1}$ Aprés calcul nous trouvons $A = 1,\ B = \frac{-22}{25},\ C = \frac{3}{5},\ D = \dfrac{3}{25},\ E = \dfrac{1}{25}$.

Toute fraction rationnelle s'écrit d'une manière unique comme somme d'un nombre fini de fractions simples et d'un polynome. Donc, le calcul des primitives d'une fraction rationnelle revient au calcul des primitives des fractions simples.

1. 1-ère espèce
$$\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \begin{cases} \ln|x-a| & \text{si } n=1 \\ \dfrac{-1}{(n-1)(x-a)^n} & \text{si } n>1 \end{cases}$$
2. 2-ième espèce
$$\int \frac{Ax+B}{((x-a)^2+b^2)^n}dx$$

<u>Les détails ont été apportés pendant le cours.</u>

Exemple 0.3.5 *Exemple d'application*
$$\int \frac{x^5-x^2+2x+1}{x^3-1}dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})) + c$$

Exercice : Trouver la fonction primitive de
$$\int \frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}dx; \quad \int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}dx$$

0.4 Primitives des fonctions se ramenant aux fonctions rationnelles

— Intégrale de type $\int f(\sin x, \cos x)dx$. On pose comme changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$. Donc on a :
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$
D'où l'intégrale devient :
$$\int f(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$$
Exemple 0.4.1
$$\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx = \int \frac{4t}{(1+t^2)(t-1)^2}dt = -x - \frac{2}{\tan\frac{x}{2}-1} + c.$$

— Intégrale de type $\int f(e^x)dx$, ou bien $\int f(chx, shx)dx$. On pose $t = e^x$
Exemple 0.4.2
$$\int \frac{e^x}{1+e^{3x}} = \int \frac{t}{1+t^3} = \frac{t}{(1+t)(1+t+t^2)}dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2e^x-1}{\sqrt{3}}) + c.$$
Exemple 0.4.3
$$I = \int \frac{shx}{chx+shx}dx. \quad On\ a \quad chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2},\ shx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$I = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4e^{2x}} + c$$

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

0.5 Primitives des fonctions irrationnelles

— Intégrale de type $I = \int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. Dans ce cas la on distingue trois cas :

1. **1-ère cas** $\Delta > 0$. Danc soient α, β les racines de $ax^2+bx+c=0$. On pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t \Rightarrow x = \dfrac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}$. Donc

$$I = \int f(\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}, t(\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2} - \alpha))dt$$

qui est une primitive d'une fonction rationnelle en fonction de t.

Exemple 0.5.1 *En calculant l'intégrale* $J = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$

$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1) = (x+4)^2t^2$

$$J = \int \frac{\frac{10t}{(1-t^2)^2}}{\frac{5t}{1-t^2}} = \ln|\frac{1+t}{1-t}| + c$$

2. **2-ème cas** $\Delta = 0$, $a \geq 0$ évidente. Si $a < 0$ impossible de résoudre.
3. **3-ème cas** $\Delta < 0$, $a < 0$ impossible. Mais si $a > 0$ on pose comme changement de variable $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t \Rightarrow x = \dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$

Exemple 0.5.2

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx.$$

On a $\Delta = -3 < 0$, $a = 1 > 0$, *on pose* $\sqrt{x^2+x+1} = x+t \Rightarrow x = \dfrac{1-t^2}{2t-1}$ *et* $dx = \dfrac{-t^2+2t-2}{(2t-1)^2}dt$ *alors l'intégrale* I *devient*

$$I = -2\int \frac{(t^2+t-1)^2}{(2t-1)^2(t^2-1)}dt$$

L'étudiant doit continue la solution

Exercice : Trouver la fonction primitive de J et K tels que

$$J = \int \sqrt{x^2+1}; \quad K = \int \sqrt{x^2-4}.$$

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF M'SILA
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de l'Informatique
Année universitaire : 2022/2023

1-ère année Informatique - Semestre 2
Module Analyse 02- Série :02

Exercice 01 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\int (e^x)^{n+1}dx, \quad \int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx, \quad \int \cos(x)\sin(x)dx, \quad \int \frac{x}{1+x^2}dx.$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int sh(e^x)e^x dx$$

$$\int \frac{1+x^5-x^6}{1-x}dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}-x}dx, \quad \int \frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx.$$

Exercice 02 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int \arcsin(x)dx, \quad I_2 = \int x^n \ln(x)dx, \quad I_3 = \int \frac{e^x}{2+e^{2x}}dx, \quad I_4 = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$I_5 = \int \sqrt{1+x^2}dx, \quad I_6 = \int x\ln(\frac{1-x}{1+x})dx, \quad I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin^2 x)(1+\sin x)}dx.(\text{pose } t = \sin x)$$

Exercice 03 : On considère

$$I_1 = \int_0^{\pi} (x\cos x)^2 dx; \quad I_2 = \int_0^{\pi} (x\sin x)^2 dx$$

- Trouver $I_1 + I_2$ et $I_1 - I_2$, puis déduire I_1, I_2

Exercice 04 : Soit

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)dt; \quad G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)dt$$

1. En utilisant des intégrations par parties, montrer que

$$F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x), \quad G(x) = x\sin(\ln x) - F(x).$$

2. Déduire les expressions de $F(x)$ et $G(x)$.

Exercice 05 : Soit la fonction : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

1. Trouver D_f, puis calculer l'aire $S(\alpha)$ entre le graphe de f et les droites $y = 0,\ x = \alpha,\ x = -\alpha,\ (\alpha > 0.)$
2. Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} S(\alpha)$

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

Exercice 06 : En utilisant la décomposition des fractions rationnelles, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_2^4 \frac{dx}{x(1+x^2)}, \quad \int_2^3 \frac{x^2-1}{(x-1)^3(x^2+1)}dx, \quad \int_2^4 \frac{x+1}{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x^2+1)}dx$$

Exercice 07 : Devoir

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx, \quad \int \frac{(1-\sqrt{x^2+x+1})^2}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}dx.$$

Exercice 08 : Devoir

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int \frac{1}{4+5\sin(x)}dx, \quad J = \int \frac{(\sin x)^3}{(\cos x)^4}dx.$$

2. On pose $K = \int e^x \sin(4x)dx, \quad L = \int e^x \cos(4x)dx$
   - Démontrer que K et L sont des inconnues d'un système linéaire de deux équations que l'on déterminer.
   - Déduire l'expression de K et L

<u>Solution :</u>

$$I = \frac{1}{3}\ln\frac{4\tan\frac{1}{2}x+2}{4\tan\frac{1}{2}x+8}, \quad J = \frac{-72\cos x - 44\cos 3x - 12\cos 5x}{90\cos 2x + 36\cos 6x + 60}$$

$$K = \frac{1}{17}e^x\sin 4x - \frac{4}{17}e^x\cos 4x, \quad L = \frac{1}{17}e^x\cos 4x + \frac{4}{17}e^x\sin 4x$$

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***