

II - Electrostatique

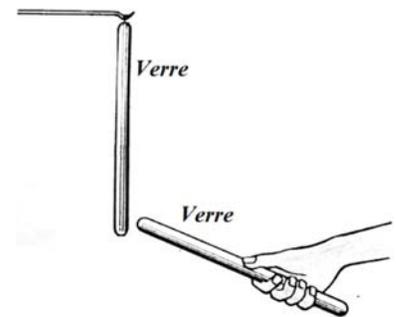
II.1. Introduction

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques pour l'observateur. Les lois obtenues peuvent se généraliser à des systèmes variables (quasi-électrostatique) pourvu que la distribution des charges puisse être considérée comme en équilibre à chaque instant.

Depuis l'Antiquité il est connu que certains matériaux, dont l'ambre, attirent des objets de petite taille après avoir été frottés. Le mot grec pour ambre (électron), a donné son nom à de nombreux domaines scientifiques. L'électrostatique décrit notamment les forces qu'exercent les charges électriques entre elles : il s'agit de la loi de Coulomb. Cette loi sera énoncée au chapitre I. Pour connaître les propriétés de la charge électrique, on peut mener quelques expériences élémentaires à l'aide de tiges de plastique, de verre et de métal munies d'une poignée de bois. On a aussi besoin de morceaux de laine et de soie ainsi que la ficelle.

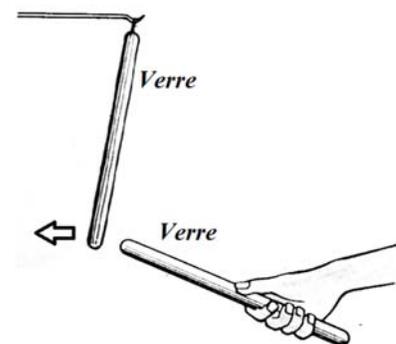
Expérience 1 :

On approche une tige de plastique d'une autre tige de plastique suspendue. Les tiges n'ont été frottées ni avec la laine ni avec de la soie. Les tiges restent immobiles. Il n'y a donc aucune force entre les deux tiges. On dit que les tiges sont neutres.



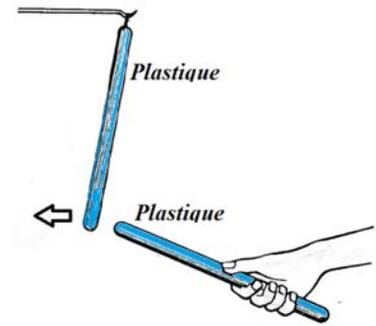
Expérience 2 :

On frotte deux tiges de l'expérience 1 avec de la laine. Lorsqu'on approche la première tige de la tige suspendue, il y a une répulsion entre les tiges

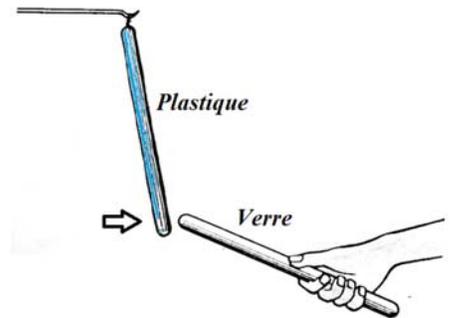


Experience3 :

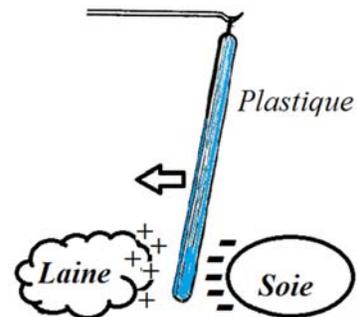
On frotte deux tiges de plastique avec de la soie.
Lorsqu'on approche la première tige de la tige suspendue,
il y a une répulsion entre les tiges

**Experience4 :**

On frotte une tige de verre avec de la soie et une tige de
plastique avec de la laine. On suspende la tige de
plastique. Lorsqu'on approche la tige de verre, il y a une
attraction entre les tiges.

**Experience5 :**

On frotte une tige de verre avec de la soie et une tige de
plastique avec de la laine. On suspende la tige de
plastique entre deux matières. La tige de plastique est
attirée par la laine utilisée pour charger la tige. De plus, la
tige est repoussée par la soie ayant servi à la charge la
tige de verre



Dans ces expériences, le module de la force est le plus grand lorsqu'on diminue la distance entre les tiges ou lorsqu'on frotte plus longtemps les tiges. Ces expériences montrent que les tiges acquièrent respectivement une charge électrique nette lorsqu'on les frotte avec de la laine ou de la soie. Elles démontrent aussi que les objets chargés exercent l'un sur l'autre une force à distance qu'on appelle la force électrique. Cette force est soit attractive (voir l'expérience 4), soit répulsive (voir l'expérience 2 et 3). L'expérience 5 prouve que la laine devient aussi chargée après avoir été frottée sur le plastique. La laine se comporte comme la tige de verre et attire la tige de plastique. De plus, la soie ayant servi à charger une tige de verre repousse la tige de plastique. Elle se comporte comme le plastique.

Convention : la charge de la tige de verre frottée avec la soie est *positive*, et celle de la tige plastique frottée avec de la laine est *negative*.

II.2. Propriétés de la charge électrique

La charge électrique, qui caractérise l'état d'électrisation d'une charge élémentaire, est toujours liée à la matière : toutes les particules élémentaires chargées ont une masse non nulle. En outre, la charge électrique possède des propriétés remarquables.

- ✓ La charge électrique peut exister sous deux formes, l'une qualifiée de positive, l'autre de négative. Ce choix est purement conventionnel.
- ✓ La charge électrique d'un système est une grandeur extensive ; elle peut se mettre sous la forme de la somme algébrique des charges élémentaires qui la constituent.
- ✓ L'expérience montre que la charge électrique totale d'un système ne peut être ni détruite, ni créée. Elle se conserve.
- ✓ De nombreuses expériences, dont la plus célèbre fut réalisée par le physicien américain P. Millikan en 1920, montrent que la charge électrique d'un système ne peut varier que par multiples entiers d'une charge élémentaire de valeur

$$e = 1,60217733 \times 10^{-19} \text{ C} \sim 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

L'unité C du système international étant le coulomb.

La charge d'un système quelconque s'écrit donc : $Q = Ze$, Z étant un entier positif ou négatif.

- ✓ La charge électrique d'un système est invariante par changement de référentiel galiléen ; sa valeur ne dépend pas du référentiel galiléen dans lequel on la mesure.

II.3. Matériaux conducteurs, matériaux isolants

Du point de vue électrique, on distingue deux grandes familles de matériaux : les isolants et les conducteurs

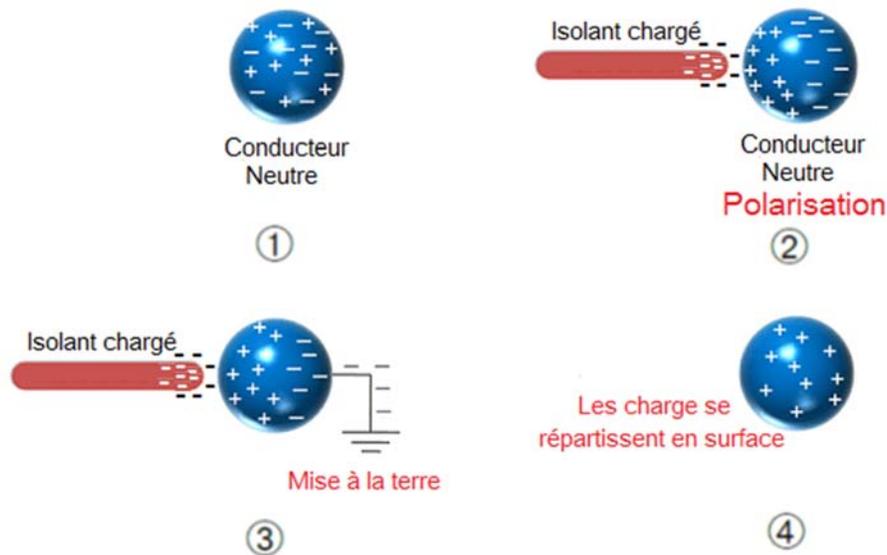
II.3.1. Matériaux isolants (diélectriques)

Les corps qui par leur structure interne, ne permettent pas le passage des électrons libres d'un atome à un autre sont appelés des isolants électriques (ébonite, verre, porcelaine, les matières plastiques ...), les isolants se charge par friction.

II.3.2. Matériaux conducteurs

Dans ce type de matériau, les charges sont libres de se déplacer et se répartissent dans l'ensemble du matériau sous l'effet de la répulsion électrostatique.

Un conducteur se charge par induction :



À l'échelle macroscopique :

- un objet chargé **néativement** comporte un **excès** de charges négatives ;
- un objet chargé **positivement** comporte un **déficit** de charges négatives.

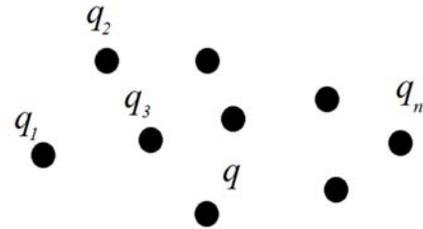
II.3.3. Distributions de charges

L'étude des propriétés physiques des corps chargés électriquement nécessite une description mathématique de la répartition des charges. On distinguera les distributions discrètes et les distributions continues :

a) Distributions discrètes

- Charge ponctuelle

On considérera une charge comme ponctuelle quand la distance charge – observateur est très grande devant la taille caractéristique de la charge.



- Distribution discrète

Ensemble de charges discernables par un observateur $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$

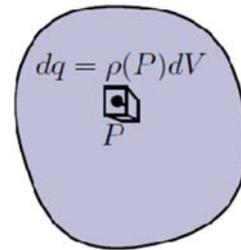
b) Distributions continues

- Distribution volumique :

Les charges, indiscernables à l'échelle macroscopique, sont contenues dans un volume v . Le petit volume Δv autour du point M contient la quantité de charges Δq .

On définit la **densité volumique** de charges ρ par :

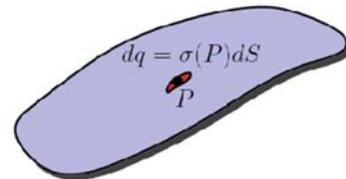
$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad [\rho] = C \cdot Cm^{-3}$$



- Distribution surfacique :

On définit la densité surfacique de charges σ par :

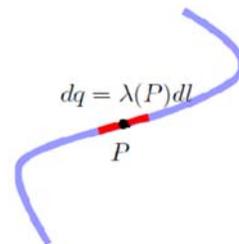
$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad [\sigma] = C \cdot Cm^{-2}$$



- Distribution linéique :

On définit la densité surfacique de charges λ par :

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad [\lambda] = C \cdot Cm^{-1}$$



Nous verrons ultérieurement l'importance des symétries que peuvent présenter les distributions de charges dans la détermination des champs électriques créés par celles-ci.

II.4. Interactions coulombiennes (électrostatiques).

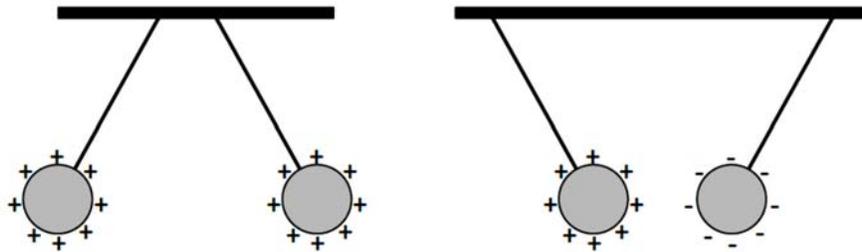
Ensemble de deux interactions réciproques qu'exercent l'un sur l'autre deux systèmes chargés électriquement.

Expérimentalement, on observe que :

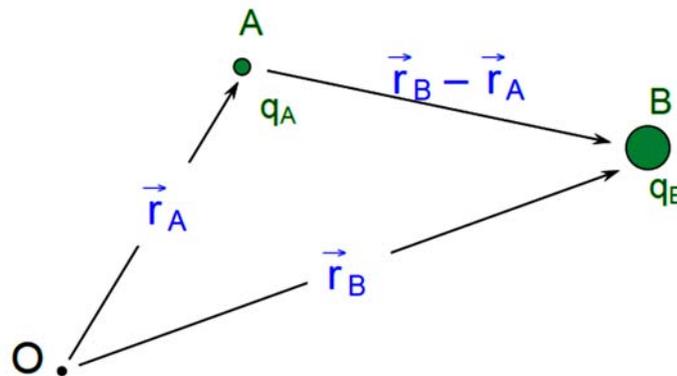
- Les charges de même signe (+) (+) ou (-) (-) se repoussent ;
- Les charges de signes opposés (+) (-) ou (-) (+) s'attirent.

Exemples :

- sphères chargées électriquement



Cas de deux charges ponctuelles q_A et q_B



La **loi de Coulomb** (électrostatique) indique que la force exercée par A sur B s'exprime sous forme vectorielle par :

$$\vec{F}_{AB} = K \frac{q_A q_B}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|^2} \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|}$$

Dans le système S.I. : $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

Avec : ϵ_0 : permittivité diélectrique **du vide**

$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \Rightarrow K = 8.9877 \cdot 10^{+9} \text{ S.I.}$

Ou encore :

$$\vec{F}_{AB} = K \frac{q_A q_B}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|^2} \vec{u}_{AB}$$

Avec $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|} = \frac{\vec{AB}}{AB}$ vecteur unitaire

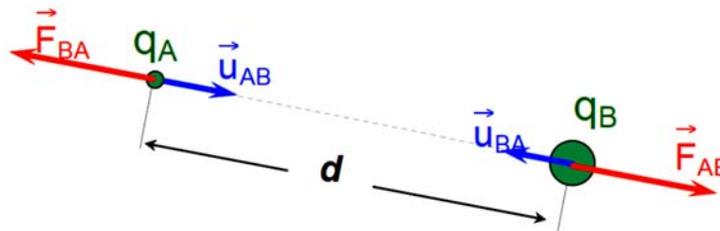
Force exercée par B sur A :

$$\vec{F}_{BA} = K \frac{q_B q_A}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|^2} \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|}$$

Ou encore :

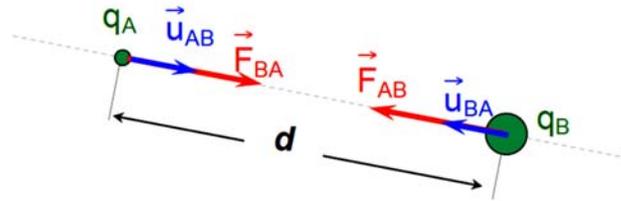
$$\vec{F}_{BA} = K \frac{q_B q_A}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|^2} \vec{u}_{BA}$$

1^{er} cas : $q_A q_B > 0$ charges de même signe (+)(+) ou (-)(-)



Interaction répulsive

2^{ème} cas : $q_A q_B < 0$ charges opposées (+) (-) ou (+) (-)



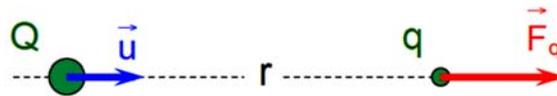
Interaction attractive

On a toujours $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

II.5. Le champ électrique

II.5.1. Définition

On considère une charge Q fixe et on approche une charge q en un point M situé à une distance r de celle-ci.



La loi de Coulomb indique que q subit une force électrostatique :

$$F_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{u}$$

Si on remplace q par q' , la force devient :



$$F_{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq'}{r^2} \vec{u}$$

La grandeur vectorielle \vec{F}/q est indépendante de q ou q' :

$$\frac{\vec{F}_q}{q} = \frac{\vec{F}_{q'}}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u} = \vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{F}_q = q \cdot \vec{E} \\ \vec{F}_{q'} = q' \cdot \vec{E} \end{cases}$$

\vec{E} ne dépend que la charge source Q et de la distance par-rapport à cette source. Cette grandeur est définie comme étant le champ électrostatique créé par la charge Q .

La présence d'une charge électrique modifie donc les propriétés locales de l'espace en faisant apparaître un champ électrostatique affectant chaque point de l'espace.

$\vec{E}(M)$ est un champ vectoriel défini en (presque) tous les points de l'espace :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}$$

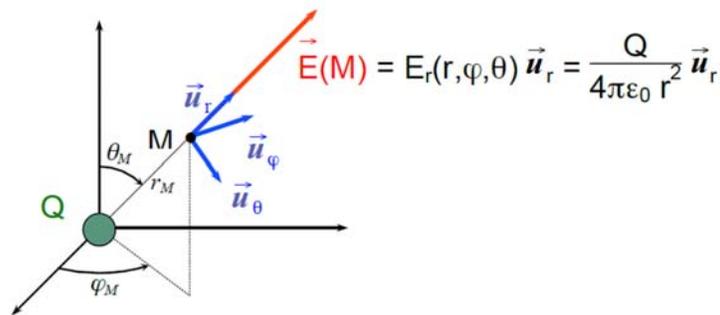
En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_x \vec{u}_x + \vec{E}_y \vec{u}_y + \vec{E}_z \vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques :

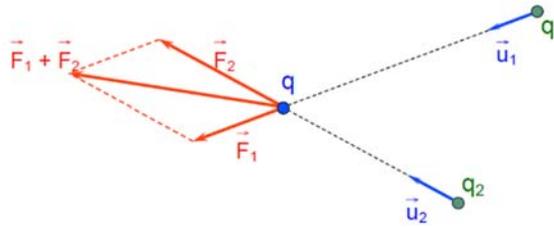
$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}_r \vec{u}_r + \vec{E}_\theta \vec{u}_\theta + \vec{E}_\varphi \vec{u}_\varphi$$

Exemple : champ créé par une charge ponctuelle $Q (>0)$:



II.5.2. Champ électrostatique créé par deux charges

En vertu de l'additivité des forces électrostatiques auxquelles est soumise une charge Q en présence de deux charges q_1, q_2 ;



On montre que la force totale s'écrit :

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 = q(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = q\vec{E}_{tot}$$

Cela revient à considérer que la charge q est soumise à un champ électrostatique résultant

$$\vec{E}_{tot} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

Ce résultat peut être généralisé à n charges discrètes $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$: le champ résultant sera la somme des N champs individuels \vec{E}_i créés par les charges q_i .

$$\vec{E}_{tot} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

Ceci représente le principe de superposition qui traduit la linéarité et l'additivité des champs électriques

II.5.3. Champ électriques créés par des distributions continues.

Dans le cas de ces distributions continues, chaque portion de ligne, surface ou volume portant la charge dq crée un champ élémentaire $d\vec{E}$. Pour obtenir le champ électrique total en un point M, il faut sommer (de façon continue) ces champs élémentaires sur l'ensemble de la ligne, de la surface ou du volume.

Ainsi, on a recourt à des intégrales :

$$\vec{E} = \int_{P \in L} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2} = \int_{P \in L} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2}$$

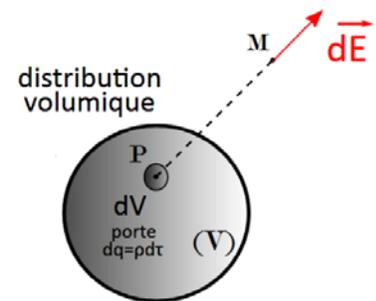
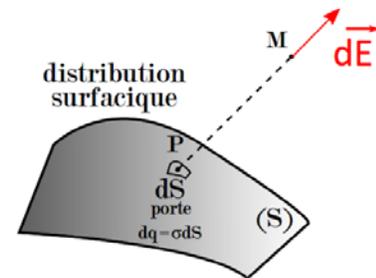
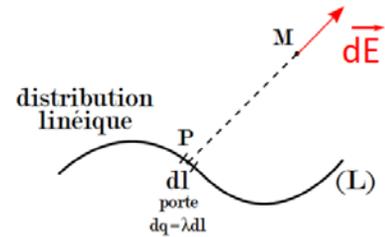
Avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$

$$\vec{E} = \iint_{P \in S} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2} = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2}$$

Avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$

$$\vec{E} = \iiint_{P \in V} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2} = \iiint_{P \in V} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2}$$

Avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$

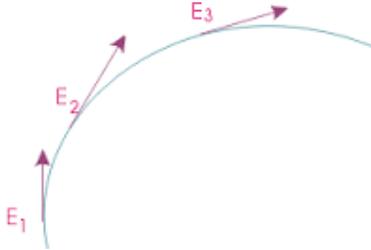


Remarque

Ces relations sont très générales et ne sont pas utilisables directement. Il convient d'abord d'analyser les symétries de la distribution de charges pour simplifier les calculs.

II.5.4. Lignes de champ

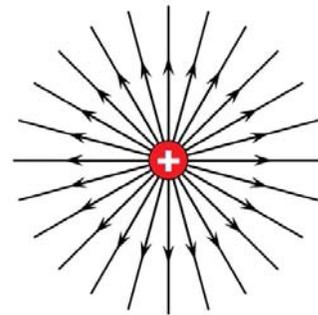
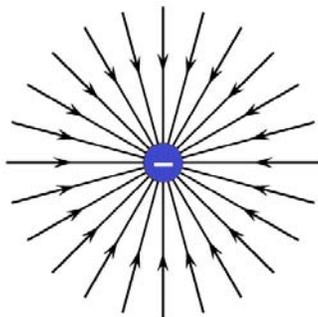
La présence d'un champ électrique n'est pas quelque chose de facile à visualiser. Grâce aux lignes de champ, on a une idée de la cartographie du champ électrique dans une portion d'espace. Une **ligne de champ** est une ligne orientée dans le sens du champ électrique, en chaque point de celle-ci, le champ électrique est tangent.



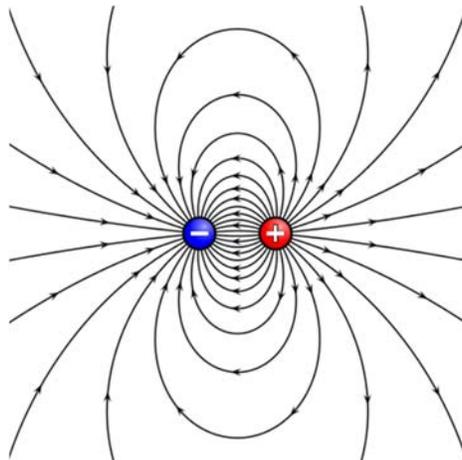
La valeur du champ \vec{E} peut varier le long d'une ligne de champ, les lignes de champ ne permettent donc de connaître que la direction du champ. Cependant, dans une région vide de charge, plus les lignes de champs sont serrées, plus le champ électrique est intense.

Exemples :

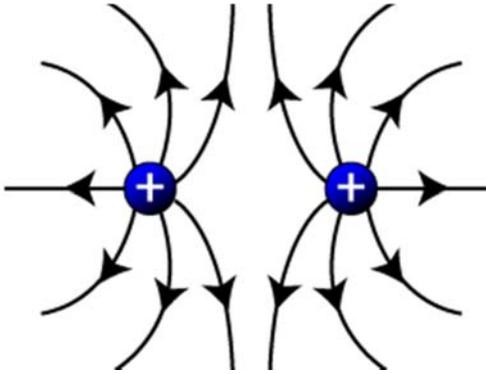
- Charges ponctuelles



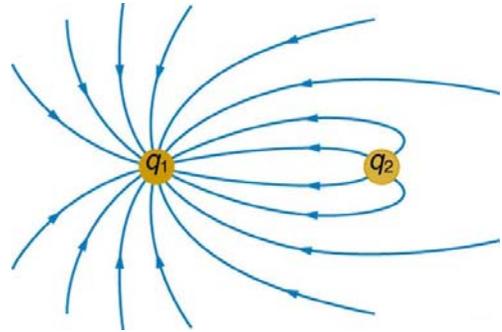
Dipôle :



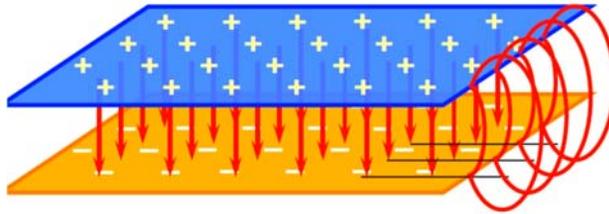
Ensemble de deux charges positives :



2 charges opposées et différentes en valeur absolue



Deux plans chargés :



Le champ est uniforme entre les deux plaques.

II.6. Potentiel électrostatique

Soit une charge q placée à l'origine d'un repère de coordonnées. Calculons la circulation de \vec{E} correspondant à un petit déplacement \overrightarrow{dM} à partir du point M :

$$dC = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = d\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K\right)$$

$$dC = -dV \text{ avec } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K$$

Pour une charge unique, la circulation d'un point fictif en présence du champ \vec{E} est une différentielle totale :

$$dC = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dM} = -dV \text{ Avec } dV = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot \overrightarrow{dM}$$

On en déduit que pour une charge ponctuelle :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \text{ avec } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K$$

II.6.1. Potentiel électrostatique créé par deux charges

$$V_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

II.6.2. Potentiel électrostatique créés par des distributions continues

$$V = \int_{P \in L} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_{P \in L} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{distribution volumique de charge}$$

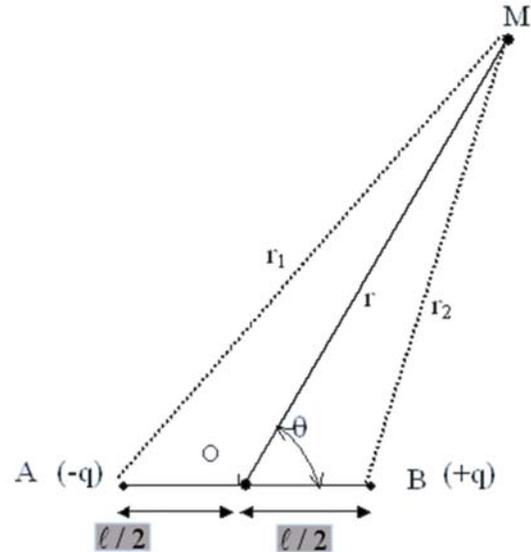
$$V = \iint_{P \in S} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{distribution surfacique de charge}$$

$$V = \iiint_{P \in V} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \iiint_{P \in V} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{distribution linéique de charge}$$

II.7. Dipôle électrostatique

II.7.1. Potentiel et champ créés à grande distance

La figure ci-contre fixe les notations utilisées dans tout ce qui suit. Si on se place en 3 dimensions, l'axe du doublet de charges représente un axe de symétrie cylindrique. Le plan méridien contenant l'axe Oz et le point M en lequel on cherche le potentiel et le champ est également un plan de symétrie. Le champ électrique suivra cette symétrie et sera contenu dans le plan méridien



II.7.2. Potentiel dipolaire

On peut calculer le potentiel en un point M quelconque en utilisant le principe de superposition. Ce potentiel sera la somme des potentiels créés par chacune des charges :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 AM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right)$$

L'expression de AM et BM en fonction des données du problème, par exemple r et theta a se calcule :

$$\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$$

$$AM = \|\vec{AO} + \vec{OM}\|$$

$$AM = \sqrt{(\vec{AO} + \vec{OM})^2}$$

$$AM = \sqrt{AO^2 + OM^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OM}}$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 + 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta)}$$

Pour BM, on obtient presque le même résultat, mais le vecteur BO étant dirigée vers les z négatifs, le produit scalaire négatif. On obtient :

$$BM = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 - 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta)}$$

Ce qui donne une expression assez compliquée de $V(M)$:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 - 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta)\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 + 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta)\right)^{1/2}} \right)$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 - 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta)\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 + 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta)\right)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

Mais ceci est l'expression complète, sans approximation. Si on veut tenir compte du fait qu'on se place loin du dipôle, c'est à dire pour $r \gg l$, on peut faire un développement au premier ordre qui donne un résultat particulièrement simple.

Développons $\frac{1}{AM}$ au premier ordre. On connaît le développement de $(1+x)^n$.

$$(1+x)^n = (1+nx) \quad \text{lorsque} \quad x \ll 1$$

Il est facile de transformer $\frac{1}{AM}$ pour obtenir une expression similaire, il suffit de mettre r^2 en facteur :

$$\frac{1}{AM} = \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 - 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{AM} = r^{-1} \left(1 + \left(\frac{l}{2r}\right)^2 + 2\left(\frac{l}{2r}\right) \cdot \cos(\theta) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Puisqu'on a $r \gg a$, le rapport $\left(\frac{a}{2}\right)/r$ est très petit. Donc on a bien une expression du type $(1+x)^n$

$$\frac{1}{AM} \approx r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2r}\right)^2 - \frac{1}{2} 2 \left(\frac{l}{2r}\right) \cdot \cos(\theta) \right)$$

de même pour $\frac{1}{BM}$

$$\frac{1}{BM} \approx r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} 2 \left(\frac{l}{2r} \right) \cdot \cos(\theta) \right)$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} 2 \left(\frac{l}{2r} \right) \cdot \cos(\theta) \right) - r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2r} \right)^2 - \frac{1}{2} 2 \left(\frac{l}{2r} \right) \cdot \cos(\theta) \right)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{r^2} \right) \cdot \cos(\theta)$$

Le produit $q \cdot a$ est la norme du moment dipolaire \vec{p} .

Donc le potentiel électrostatique $V(M)$ du dipôle peut se réécrire en fonction du moment dipolaire $p = \|\vec{p}\|$:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2}.$$

Champ électrostatique créé par un dipôle

Comme V ne dépend que de r et de θ , seules les composantes E_r et E_θ de \vec{E} seront non nulles.

On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, donc :

$$\vec{E} \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} \begin{cases} E_r = \frac{2p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

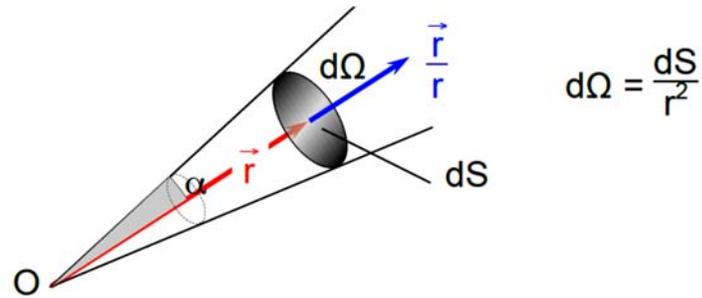
Conclusion :

Le champ créé par un dipôle est proportionnel à $\frac{1}{r^3}$ et le potentiel à $\frac{1}{r^2}$, alors que pour une charge ponctuelle, \vec{E} créé est proportionnel à $\frac{1}{r^2}$ et V à $\frac{1}{r}$.

II.8. Flux du champ électrique.

II.8.1. Notion d'angle solide

L'angle solide $d\Omega$, délimité par un cône de demi-angle α coupant un élément de surface élémentaire dS situé à une distance r de son sommet O , vaut :



$d\Omega$:

- est toujours positif
- est indépendant de r puisque $dS \propto r^2$
- s'exprime en stéradian (sr)

Calcul d'un angle solide Ω d'ouverture α :

En coordonnées sphériques, l'élément de surface perpendiculaire à \vec{u}_r est

$$dS = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

On en déduit l'expression de $d\Omega$:

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

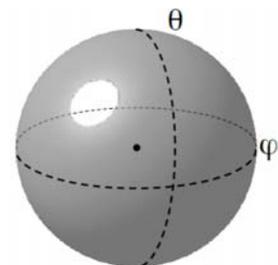
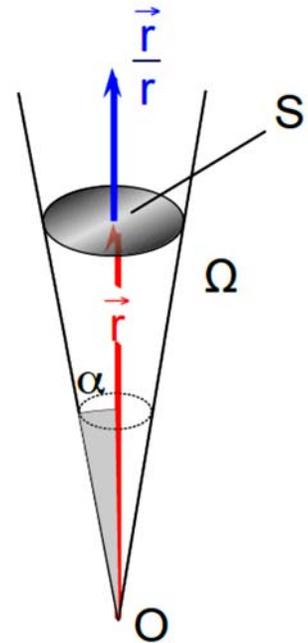
L'angle solide Ω d'ouverture est défini par :

$\phi : 0 \rightarrow 2\pi$ et $\theta : 0 \rightarrow \alpha$

D'où l'expression de Ω :

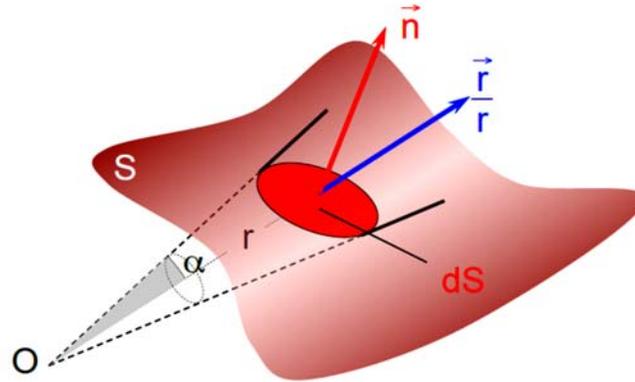
$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin(\theta) d\theta = 2\pi(1 - \cos \alpha)$$

Remarque : pour tout l'espace, $\theta : 0 \rightarrow \pi$
donc dans ce cas : $\Omega = 4\pi$.



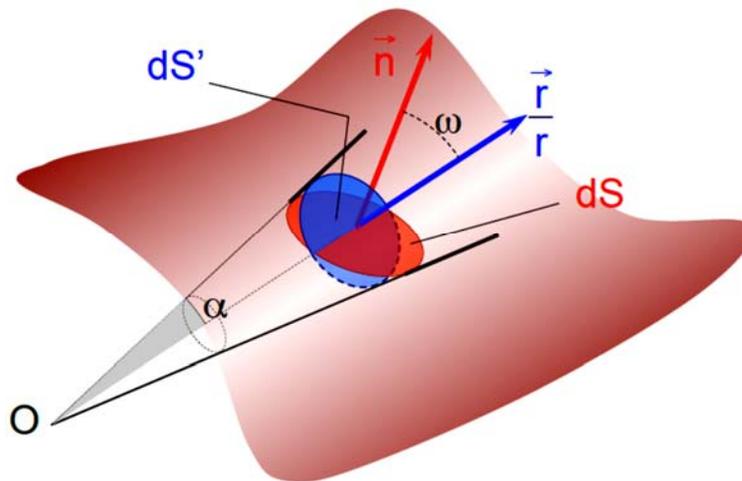
II.8.2. Surface interceptée par un angle solide

On considère une surface quelconque S et un angle solide interceptant cette surface :



La surface interceptée correspond à l'élément de surface dS . Cette surface élémentaire a pour normale \vec{n} .

On cherche à connaître le lien entre la surface interceptée par l'angle solide et la valeur de cet angle solide. On construit dS' , élément de surface perpendiculaire à \vec{r}/r



l'angle entre \vec{n} et \vec{r}/r est ω .

l'angle solide vaut : $d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$ avec $dS' = dS \cos \omega$

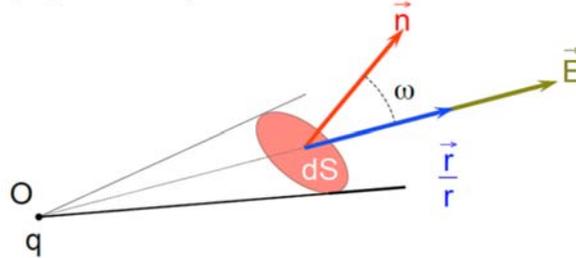
d'où finalement : $d\Omega = \frac{dS}{r^2} \cos \omega$

II.9. Théorème de Gauss

II.9.1. Notion de Flux

Flux du champ électrique à travers une surface quelconque

On considère une charge ponctuelle q en O et une surface élémentaire dS quelconque :



Le flux élémentaire $d\phi$ de \vec{E} à travers la surface dS est défini par la relation :

$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Avec $E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

Donc $d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n}$

Soit $d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{r^2} \cos \omega$

D'où finalement : $d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$

Conséquences :

- Le flux de \vec{E} ne dépend que de l'angle solide sous lequel est vue la surface,
- Le flux de \vec{E} est indépendant de la distance surface – source :

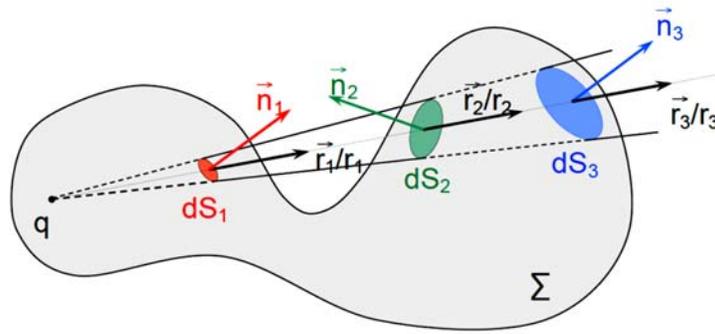
dS augmente en r^2 mais de \vec{E} diminue en $1/r^2$.

Flux total du champ électrique créé par une charge ponctuelle à travers une surface quelconque fermée

On considère une charge ponctuelle q à l'intérieur d'une surface fermée Σ .

On cherche à calculer le flux élémentaire de \vec{E} à travers la surface Σ vue sous l'angle solide $d\Omega$.

L'angle solide en question intercepte la surface fermée Σ en définissant 3 surfaces élémentaires dS_1 , dS_2 et dS_3 ayant pour normales respectives \vec{n}_1 , \vec{n}_2 et \vec{n}_3 (normales sortantes).



Dans ce cas, le flux de \vec{E} est la somme d'un nombre impair (3) de flux élémentaires :

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3$$

$$d\phi = \vec{E}(\vec{r}_1) d\vec{S}_1 + \vec{E}(\vec{r}_2) d\vec{S}_2 + \vec{E}(\vec{r}_3) d\vec{S}_3$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{dS_1}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1} \cdot \vec{n}_1 + \frac{dS_2}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \vec{n}_2 + \frac{dS_3}{r_3^2} \frac{\vec{r}_3}{r_3} \cdot \vec{n}_3 \right]$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [d\Omega - d\Omega + d\Omega] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Le flux total de \vec{E} à travers Σ et dans toutes les directions s'obtient en intégrant l'expression précédente sur les 4π stéradian :

$$\phi = \oint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

En vertu du théorème de superposition, ce résultat se généralise à un ensemble de n charges.

II.9.2. Théorème de Gauss :

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée Σ est égal, dans le vide, à la charge électrique Q_{int} contenue dans le volume défini par la surface divisée par ϵ_0 .

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

où Q_{int} représente la charge totale contenue dans V :

$$Q_{int} = \sum_{i=1}^n q_i \quad \text{ou} \quad Q_{int} = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV$$

II.10. Equilibre électrostatique des conducteurs chargés

II.10.1. Définition d'un conducteur

C'est un milieu dont les porteurs de charges libres peuvent se mettre en mouvement sous l'action d'une force.

Définition d'un conducteur en équilibre

Un conducteur est dit en équilibre, si toutes ses charges libres sont immobiles.

Propriétés d'un conducteur en équilibre

Le champ électrostatique :

Le Champ intérieur est $\vec{E}_{int} = \vec{0}$, en effet toute charge q est au repos, donc :

$$\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{0}$$

Le potentiel est constant $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0} \rightarrow V = cte$

La distribution des charges électriques ne peut être que surfacique :

Considérons un conducteur chargé en équilibre. Appliquons le théorème de Gauss en un point M du conducteur :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{puisque } \vec{E} = \vec{0} \rightarrow \rho = 0$$

Donc la charge du conducteur ne peut être que surfacique, avec une densité σ .

II.10.2. Champ au voisinage d'un conducteur- Théorème de Coulomb

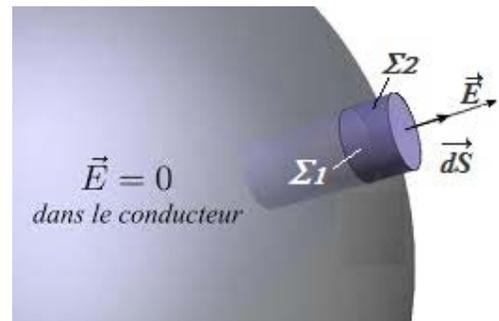
Soit un point M très voisin de la surface S du conducteur. Appliquons le théorème de Gauss à un tube de force ΣS (volume limité par des lignes de champ et de base dS). La surface latérale du tube est notée $\Sigma 2$. Limitons ce tube par une section droite passant par M et dont la surface est égale à dS (M très voisin de S).

Le flux du champ électrique sortant de Σ est :

$$d\phi = (d\phi)_{\Sigma 1} + (d\phi)_{\Sigma 2} + (d\phi)_{ds} = \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS}$$

En effet à l'intérieur du conducteur, $\vec{E}_i = \vec{0}$ et $(d\phi)_{\Sigma 1}$

de même sur toute la surface de $\Sigma 2$, \vec{E} est tangent et $(d\phi)_{\Sigma 2} = 0$ Le théorème de Gauss appliqué à Σ donne



$$d\phi = \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = E(M) \cdot ds = \frac{\sum q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma ds}{\epsilon_0}$$

$$\text{D'où : } \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Cette relation exprime *le théorème de Coulomb*.

Remarques

- Le champ électrique au voisinage immédiat d'un conducteur ne dépend que de la densité de répartition de charges.
- Le champ électrique est discontinu à la traversée d'un conducteur, puisque il est nul à l'intérieur et vaut σ/ϵ_0 juste à l'extérieur.

Application.

Calcul du champ d'un conducteur sphérique de centre O et de rayon R.

- **Cas : $r < R$** $\vec{E}_1 = \vec{E}_1 = \vec{0}$ (pas de charge à l'intérieur de la surface de Gauss)
- **Cas : $r > R$** Le champ électrique \vec{E}_2 en un point M éloigné de la surface est donné par :

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}$$

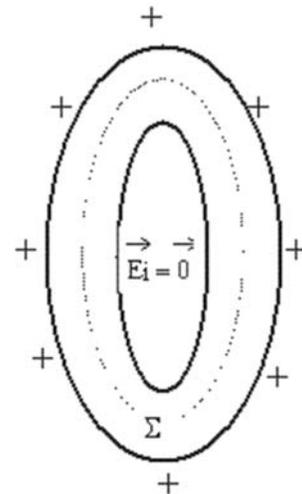
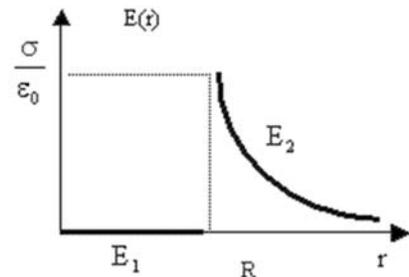
Soit

$$E_2 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{n}$$

On remarque que :

$$(E_2)_{r \rightarrow R^+} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$(E_2)_{r \rightarrow R^-} = 0$$



II.10. 3. Propriétés électriques d'un conducteur creux

On considère un conducteur creux, on montre qu'à l'intérieur de la cavité lorsque celle-ci ne renferme aucune charge électrique, les propriétés du champ et du potentiel électriques sont les mêmes qu'à l'intérieur d'un conducteur massif. En effet, la surface de la cavité est une surface équipotentielle, on en déduit que V est constant à l'intérieur de la cavité et égal au potentiel du conducteur.

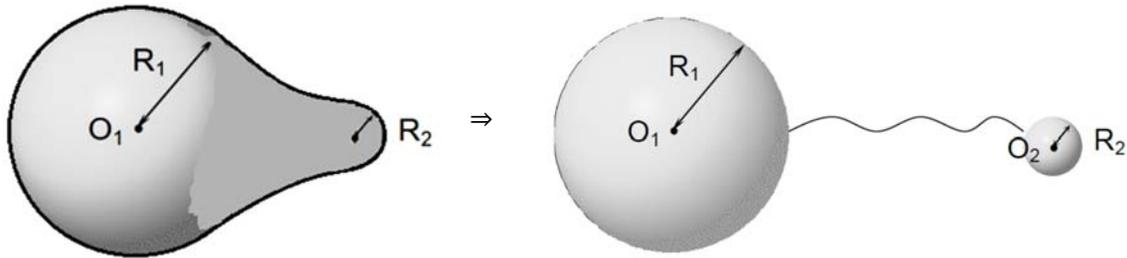
D'après la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, le champ est nul à l'intérieur de la cavité $\vec{E} = \vec{0}$, il en est de même à l'intérieur du conducteur. La charge à l'intérieur du conducteur est nulle ($\rho_i = 0$) ($r_i = 0$). En effet, si on applique le théorème de Gauss à la surface fermée Σ on a :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q}{\epsilon_0} \quad \text{Avec } \vec{E}_i = \vec{0} \quad \text{ce qui donne } Q_i = 0$$

Donc la charge est répartie uniquement sur la surface externe du conducteur creux.

II.10.4. Pouvoir des pointes

Nous allons montrer qu'à proximité d'une pointe, le champ électrique est très intense. Considérons deux sphères conductrices de rayons respectifs R_1 et R_2 portées au même potentiel (reliées par un fil conducteur). Les deux sphères ont une densité de charge uniforme σ_1 et σ_2 .



$$V(O_1) = V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma_1 dS}{R_1}$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0}$$

$$V(O_2) = V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma_2 dS}{R_2}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2} = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0}$$

Puisque les potentiels sont égaux : $V_1 = V_2$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

Si $R_1 \gg R_2$, alors $\sigma_2 \gg \sigma_1$

À potentiel égal, la densité de charges d'un conducteur chargé est plus importante sur la surface ayant une courbure forte (petit rayon) que sur la surface ayant une courbure faible (grand rayon).

II.10.5. Capacité propre d'un conducteur

Soit un conducteur C isolé. Considérons un premier état d'équilibre (état1), tel que le potentiel de C est V_1 et sa charge est Q_1 . Soit un deuxième état d'équilibre (état 2), obtenu par superposition de λ «états 1» :

Etat 1	Etat 2
V_1, Q_1	$V_2 = \lambda V_1, Q_2 = \lambda Q_1$

On obtient une relation entre la charge et le potentiel : $\frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_2}{V_2} = C_0$

La charge Q d'un conducteur seul dans l'espace est proportionnelle à son potentiel V :

$$Q = C_0 V$$

C_0 est appelée capacité propre du conducteur. Elle ne dépend que de la forme et des dimensions du conducteur et s'exprime en Farad. (Symbole : F)

Exemple. Capacité d'un conducteur sphérique

Soit un conducteur sphérique de centre O, de rayon R et de charge Q. Le potentiel du conducteur peut être trouvé à partir du potentiel $V(O)$ au centre de la sphère :

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{r=R} \frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\iint \sigma dS}{R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

D'où

$$C_0 = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Si on considère la terre comme un conducteur sphérique de rayon = 6400 km, sa capacité est :

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 R = \frac{6.4 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} = 0.71 \cdot 10^{-3} F \quad \text{soit } 0.71 \text{ mF}$$

II.10.6. Phénomène d'influence

Influence subie par un conducteur isolé

Soit A un conducteur isolé ne portant aucune charge :

$$Q = 0, V = 0 \text{ et } \vec{E} = \vec{0}.$$

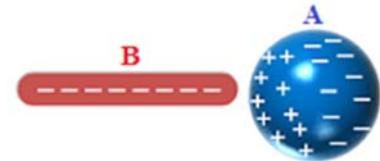
On approche de A un corps B chargé négativement.

A influencé par B :

des charges (+) apparaissent sur la partie de A proche de B et des charges (-) sur la partie la plus éloignée.

- modification de la répartition des charges sur la surface de A,
- A étant isolé donc sa charge reste constante égale à sa valeur initiale.

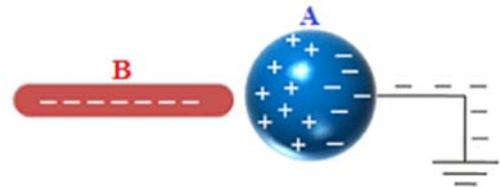
Le phénomène d'influence ne modifie pas la charge totale d'un conducteur isolé, mais modifie uniquement la répartition de cette charge sur sa surface et donc son potentiel.



Influence subie par un conducteur maintenu à un potentiel constant

Le conducteur A est , maintenant, relié à un générateur qui maintient son potentiel constant ou bien à la terre dont le potentiel est nul.

Lorsqu'on approche de A le corps B chargé négativement, il apparaît que des charges (+) sur A, alors qu'il y'a déplacement des charges (-) vers la terre.



Dans ce cas, le phénomène d'influence ne modifie pas le potentiel du conducteur, mais modifie sa charge totale et la répartition de cette charge.

L'influence totale.

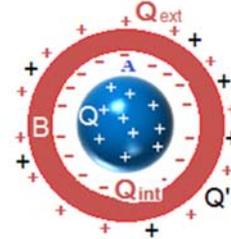
L'influence totale apparaît lorsque le conducteur influencé (B) entoure le conducteur influençant (A).



1. *B isolé et initialement neutre*

$$Q_{int} = -Q \text{ et } Q_{ext} = +Q$$

Il apparaît sur la face externe la charge +Q

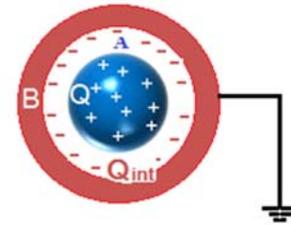


2. *B isolé et porte initialement une charge Q'*

Il apparaît sur sa face externe la charge Q + Q'

3. *B relié au sol*

Aucune charge sur sa face externe.



Capacités et coefficients d'influence d'un système de conducteurs en équilibre électrostatique

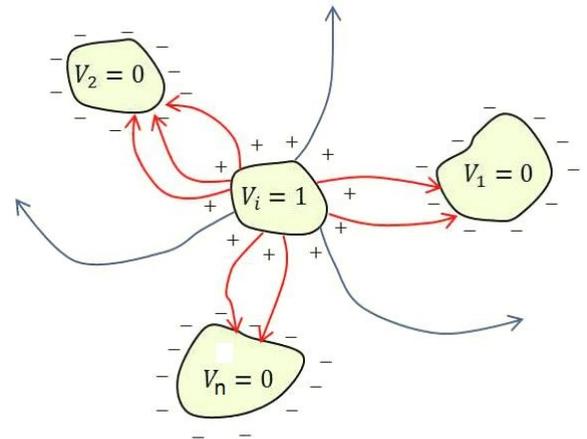
Considérons n conducteurs portés aux potentiels V_1, V_2, \dots, V_n ; et portant les charges Q_1, Q_2, \dots, Q_n . On montre que les charges Q_1, Q_2, \dots, Q_n sont des fonctions linéaires des potentiels des conducteurs :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \dots + C_{1n}V_n$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \dots + C_{2n}V_n$$

.

$$Q_n = C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \dots + C_{nn}V_n$$



Les coefficients C_{ij} sont les coefficients d'influences entre conducteurs : $C_{ij} = C_{ji} < 0$, les coefficients C_{ii} sont les capacités des conducteurs en présence des autres conducteurs : $C_{ii} > 0$. La capacité C_{ii} du conducteur i en présence des autres conducteurs est différente de sa capacité C_i lorsqu'il est seul.

II.11. Les condensateurs

Un condensateur est formé de deux conducteurs en influence totale. Les deux conducteurs sont appelés armatures du condensateur.

On appelle charge du condensateur, la charge Q de son armature interne. Soient V_1 et V_2 les potentiels respectifs des armatures interne et externe.

Le rapport $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$ est appelé capacité du condensateur

Représentation symbolique : 

II.11.1. Calcul de capacités

a) Méthode de calcul de capacités

1. En utilisant le théorème de Gauss, on calcule le champ E entre les armatures,
2. On calcule la circulation du champ d'une armature à l'autre, $V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$
3. Connaissant la charge $Q = \iint_S \sigma ds$,

$$\text{On calcule } C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

b) Le condensateur plan

Il est constitué de deux plans infinis portés aux potentiels V_1 et V_2 et distant de d .

Entre les armatures E est uniforme : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$

Calculons la circulation de champs électrique :

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad V_1 - V_2 = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V_1 - V_2 = E \cdot d$$

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

D'autre part une portion du conducteur de surface S porte la charge $Q = \sigma \cdot S$

Donc :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0 \cdot S}$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot S} = \frac{V_1 - V_2}{d} \quad \rightarrow \quad C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Pour augmenter C il faut remplacer le vide par de la matière, c'est-à-dire ϵ_0 par ϵ_r .

II.11.2. Associations de condensateurs

a) Association en série

Dans ce groupement tous les condensateurs portent la même charge Q ,

Le Condensateur équivalent aura la même charge Q sous la d.d.p V de l'ensemble en série.

Sa capacité C_{eq} est donnée par :

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

b) Association en parallèle

Dans ce groupement tous les condensateurs ont la même d.d.p V à leurs bornes.

Le Condensateur équivalent aura la charge $Q=Q_1+Q_2+Q_3$ sous la d.d.p V .

Sa capacité C_{eq} est donnée par :

$$Q = C_{eq}V = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1Q + C_2Q + C_3Q \rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

Pour un groupement en parallèle de n condensateurs, la capacité du condensateur équivalent sera :

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

