إختبار كاي تربيع (χ^2)

دلالة الفروق لعينة واحدة

1) **تعريف**: اعده كارل بيرسون حيث يعتبر من بين الاختبارات التي تستخدم في تحليل البيانات الاسمية والرتبية، كذلك يستخدم للموازنة بين التوزيعات التكرارية للمتغيرات ويرمز له بالرمز χ^2

2) **شروط إستخدامه**

- أن تكون البيانات على شكل تكرارات وليس نسباً مئوية أو كسوراً
- أن لا يقل مجموع التكرارات الفعلية عن 20 تكراراً ويفضل أن يزيد عدداً عن 40 تكراراً
- ألا يقل مجموع التكرارات المتوقعة في أي فئة من فئات التصنيف عن 05 تكرارات .

3) **الحساب**: يطلق على هذا النوع من الاختبارات باختبار "حسن المطابقة" حيث يطبق في حالة متغير واحد، وفي هذا الاختبار يتم إختبار مدى تطابق التكرارات الحقيقية مع التكرارات المتوقعة وذلك وفق القانون التالي:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

حيث O_i يمثل التكرار المشاهد للنتيجة رقم i

E_i تمثل التكرار المتوقع المناظر للنتيجة رقم i والتكرار المتوقع =

$$E = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{\text{عدد البدائل}}$$

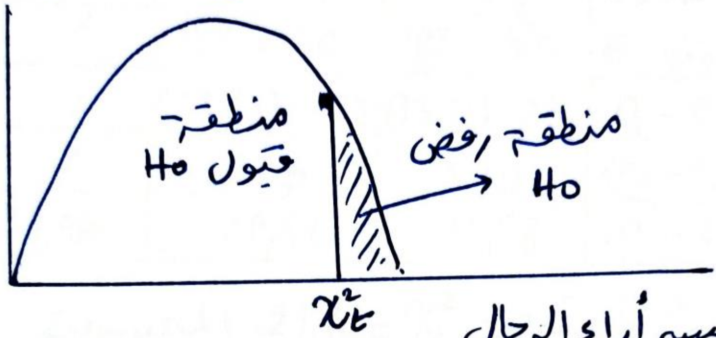
4) **الدلالة الاحصائية**

للإختبار كاي تربيع يتم مقارنة χ^2 المحسوبة (χ^2_c) مع كاي تربيع الجدولية (χ^2_t) التي تستخرج من الجداول الاحصائية من خلال حساب درجة الحرية (df) = (عدد البدائل − 1)

5) **حالات قبول أو رفض الفرضية الصفرية** (H_0)

اذا كانت χ^2_c المحسوبة اكبر أو تساوي قيمة χ^2_t الجدولية فإننا نرفض الفرض الصفري H_0 ونقبل الفرض البديل H_1

وإذا كانت قيمة χ^2_c المحسوبة أقل من قيمة χ^2_t الجدولية فإننا نقبل الفرض الصفري ونرفض الفرض البديل كما يلي :



مثال : في دراسة لسبر أراء الرجال المتزوجين في عمل زوجاتهم فكانت النتائج كما يلي :

الرأي	موافق	معارض	المجموع
التكرار	73	27	100

المطلوب : هل توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين الموافقين والمعارضين لعمل زوجاتهم.

الحل : سيتم وفق الخطوات التالية

1) **تحديد الفرضيات**

* الفرضية الصفرية : لا توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين الموافقين والمعارضين لعمل زوجاتهم $H_0\ \chi^2_t = 0$

* الفرضية البديلة : توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين المعارضين والموافقين لعمل زوجاتهم $H_1\ \chi^2 \neq 0$

2) **تحديد مستوى الدلالة** : مستوى الدلالة $\alpha = 0{,}05$

3) **حساب χ^2_c المحسوبة** من خلال القانون

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

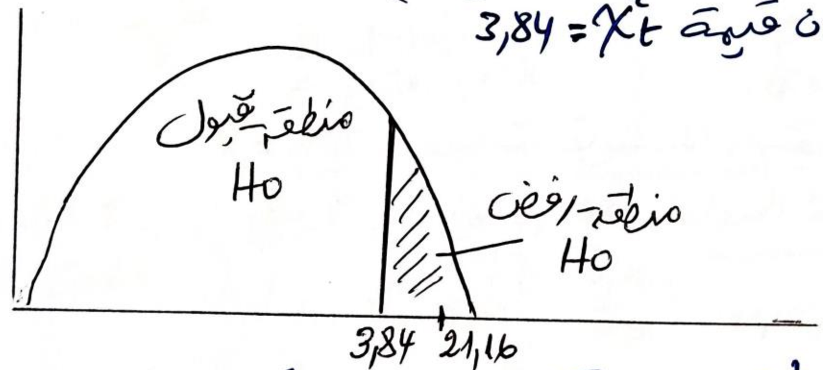
المجموع	معارض	موافق	الرأي
100	27	73	التكرار المشاهد O
/	$\frac{100}{2} = 50$	$\frac{100}{2} = 50$	التكرار المتوقع E
/	$(27-50) = -23$	$(73-50) = 23$	$O_i - E_i$
/	529	529	$(O-E)^2$
21,16	10,58	10,58	$(O-E)^2/E$

إذن قيمة كاي تربيع $X^2 = 21,16$ المحسوبة X_c^2

4) حساب كاي تربيع الجدولية X_t^2

درجة الحرية: (عدد البدائل − 1) = 2 − 1 = 1 وقيمتها 3,84

إذن قيمة $X_t^2 = 3,84$



بما أن قيمة X_c^2 المحسوبة أكبر من قيمة X_t^2 الجدولية فإننا نرفض الفرضية الصفرية Ho ونقبل الفرضية البديلة H_1

4

أخذ رأي عينة من الطلبة عدد 23 طالب في قضية معينة وكان عدد الموافقين (6) وعدد المعارضين (15) والمترددين (2) المطلوب اختبار الفرض الصفري عند مستوى دلالة 0,05

الرأي	O	E	O-E	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
الموافقين	6	7,67	-1,67	2,789	0,364
المترددين	2	7,67	-5,67	32,14	4,192
المعارضين	15	7,67	7,33	53,729	7,005
المجموع	23				$\boxed{11,561}$

التكرار الملاحظ هو الذي يجمعه الباحث

$$E = \frac{\sum O}{\text{عدد المجاميع}} = \frac{23}{3} = 7,67$$

درجة الحرية df = عدد المستويات - 1

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

O التكرار الملاحظ

E التكرار المتوقع

$df = 3 - 1 = 2$

$df = 2$

بما أن القيمة المحسوبة تساوي $\chi^2_c = 11,561$

القيمة الجدولية 0,103 ودرجة الحرية $df = 2$ ومستوى دلالة $\alpha = 0,05$

$\chi^2_t = 0,103$

$\chi^2_c > \chi^2_t \implies 11,561 > 0,103$

إذن نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1

معناه توجد فروق بين التكرار الملاحظ وبين التكرار المتوقع وأن الفرق حقيقي لا يرجع الى عامل الصدفة : رأي العينة يختلف عن رأي المجتمع

دلالة الفروق لعينتين مستقلتين أو أكثر

1) **تعريف**: يطلق على هذا النوع من الاختبارات "إختبار الاستقلالية"
حيث يطبق في حالة دراسة العلاقة بين متغيرين من
أجل تحديد وجود علاقة إرتباط أو إستقلال بين متغيرين
أو أن المتغير الاول يؤثر في المتغير الثاني ام لا ولكنه لا يقيس
درجة هذه العلاقة وذلك وفق القانون التالي

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

حيث التكرار المتوقع

$$E = \frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{حجم العينة}}$$

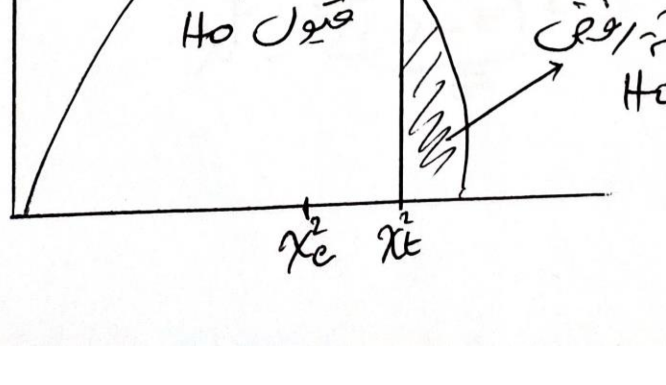
2) **الدلالة الاحصائية**

درجة الحرية = (عدد الصفوف - ١) × (عدد الأعمدة - ١)

أي $df = (c-1)(l-1)$

3) **حالات قبول أو رفض الفرض الصفري**

إذا كانت قيمة χ^2_c المحسوبة اكبر او تساوي قيمة χ^2_t الجدولية
فإننا نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1
وإذا كانت قيمة χ^2_c أقل من قيمة χ^2_t الجدولية فإننا نقبل بالفرض الصفري H_0
ونرفض الفرض البديل كما يلي :



مثال: اراد إحصائي معرفة الفرق بين معدل الطالب في مقياس الإحصاء ومكان جلوسه في القسم فكانت نتائج طلبة الفوج المقدر عددهم بـ 60 طالب كما يلي:

مكان الجلوس / المعدل	المقاعد الامامية	المقاعد الوسطى	المقاعد الخلفية	المجموع
ناجح	20	9	7	36
راسب	4	7	13	24
المجموع	24	16	20	60

المطلوب: هل هناك فروق ذات دلالة إحصائية بين معدل الطالب في مقياس الاحصاء ومكان جلوسه في القسم؟

الحل:

1) - تحديد الفرضيات

- الفرضية الصفرية (H_0): لا توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين معدل الطالب في مقياس الاحصاء ومكان جلوسه في القسم

$H_0: \chi^2 = 0$

الفرضية البديلة: توجد فروق ذات دلالة احصائية بين معدل الطالب في مقياس الاحصاء ومكان جلوسه

$H_1: \chi^2 \neq 0$

2) تحديد مستوى الدلالة $\alpha = 0,05$

3) حساب كاي تربيع المحسوبة (χ^2_c) من خلال القانون

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

المعدل \ مكان الجلوس	المقاعد الامامية	المقاعد الوسطى	المقاعد الخلفية	المجموع
ناجح (O)	20	9	7	36
التكرار المتوقع (E)	$\frac{36.24}{60} = 14,4$	$\frac{36.16}{60} = 9,6$	$\frac{36.20}{60} = 12$	1
راسب (O)	4	7	13	24
التكرار المتوقع (E)	$\frac{24.24}{60} = 9,6$	$\frac{24.16}{60} = 6,4$	$\frac{24.20}{60} = 8$	/
المجموع	24	16	20	60

$$\frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{حجم العينة}}$$

ب) حساب كاي تربيع X^2

$$\frac{2(8-13)}{8} + \frac{2(6,4-7)}{6,4} + \frac{2(9,6-4)}{9,6} + \frac{2(12-7)}{12} + \frac{2(9,6-9)}{9,6} + \frac{2(14,4-20)}{14,4}$$

$$\frac{2(5)}{8} + \frac{2(0,6)}{6,4} + \frac{2(-5,6)}{9,6} + \frac{2(-5)}{12} + \frac{2(-0,6)}{9,6} + \frac{2(5,6)}{14,4}$$

$$3,125 + 0,05625 + 3,27 + 2,08 + 0,0375 + 2,18 = 10,75$$

$$X_c^2 = 10,75$$

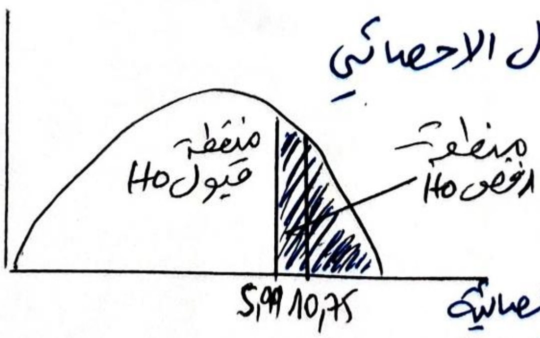
4 حساب X_t^2 الجدولية

$\left[df = (c-1)(l-1)\right]$ (1 - عدد الاعمدة)(عدد الصفوف - 1) = درجة الحرية

$$df = (2-1)(3-1) = 1.2 = 2$$

مستوى الدلالة $\alpha = 0,05$

قيمة $X_t^2 = 5,99$ حسب الجدول الاحصائي



5) اتخاذ القرار

بما أن X_c^2 المحسوبة اكبر من X_t^2 المجدولة فإننا نرفض الفرضية الصفرية ونقبل بالفرضية البديلة

6) النتيجة: توجد فروق ذات دلالة احصائية بين معدل الطالب في مقياس الاحصاء ومكان جلوسه في القسم

2

مربع كاي (χ^2) الاستقلالية
عندما يكون لدينا متغيرين مستقلين

مثال: اراد باحث التعرف فيما إذا كانت عينة من الذكور يختلفون في إجاباتهم عن احدى فقرات إستبيانية معينة عن اجابات عينة من الاناث ولنفس العينة حصل على النتائج التالية (الجدول) المطلوب اختبار الفرض الصفري عند مستوى دلالة $\alpha = 0{,}05$

	نعم	لا	لا أدري	Σ
ذكور	60 A	20 B	40 C	120
اناث	40 D	10 E	30 F	80
Σ	100	30	70	200

$H_0: O = E$

$$E = \frac{\Sigma FV \times \Sigma FN}{\Sigma F}$$

ΣF : المجموع الكلي

ΣFN مجموع التكرارات الافقي

ΣFV مجموع التكرارات العمودي

$$E_A = \frac{120 \cdot 100}{200} = 60$$

$$E_B = \frac{120 \cdot 30}{200} = 18$$

$$E_C = \frac{120 \cdot 70}{200} = 42$$

$$E_D = \frac{80 \cdot 100}{200} = 40$$

$$E_E = \frac{80 \cdot 30}{200} = 12$$

$$E_F = \frac{80 \cdot 70}{200} = 28$$

الخلايا	O	E	O−E	$(O-E)^2$	$(O-E)^2/E$
A	60	60	0	0	0
B	20	18	2	4	0,22
C	40	42	−2	4	0,095
D	40	40	0	0	0
E	10	12	−2	4	0,33
F	30	28	2	4	0,143
					0,788

عدد الفقرات B المتغيرات A

درجة الحرية = $(A-1)(B-1)$

$(2-1)(3-1) = 1 \times 2 = 2$

الاستنتاج : القيمة المحسوبة البالغة 0,788 هي أصغر من القيمة الجدولية 5,99 عند مستوى دلالة $\alpha = 0{,}05$ ؛ نقبل الفرضية الصفرية ونرفض الفرضية البديلة اي لا توجد فروق إحصائية بين إجابات الذكور والاناث في الفقرة ؛ توجد فروق ترجع الى عامل الصدفة .