Chapitre II : Conduction unidimensionnelle en régime permanent

La conduction est la transmission de la chaleur à travers un corps sans déplacement de la matière. Le transfert de la chaleur comme l'énergie, est associe aux mouvements de vibration et de rotation des molécules et atomes, (énergie transformée en chaleur irréversiblement). Ce mode de transfert de chaleur peut être aisément modéliser et décrit mathématiquement.

II-1) Développement de l'équation différentielle générale de la conduction

Pour la description analytique ou mathématique, on doit premièrement développer l'équation générale de la conduction en coordonnées cartésiennes puis, avec le même principe, où en coordonnées cylindriques et sphériques, peuvent être déduites. Considérant un volume infinitésimal (dV) dans un système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z; voir Fig.2-1). Le principe de conservation de l'énergie pour le volume de contrôle de la figure (Fig.2-1) pendant le temps dt, peut être formulé comme suit:

L'utilisation de la loi de Fourier permet d'exprimer les quantités de chaleur relativement à la section perpendiculaire à l'axe des (x par exemple).

– La chaleur transportée à travers la surface de gauche de (dV) dans la direction (x) est donnée par :

$$dQ_x = -K.dydz.\frac{\partial T}{\partial x}; (ds = dy.dz)$$

– La chaleur transportée (sortie) à travers la surface de droite de (dV) dans la direction (x) est donnée par :

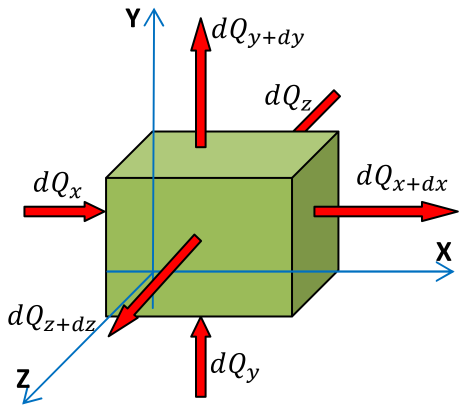


Fig.2-1: Modèle de volume infinitésimal

$$dQ_{x+dx} = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x}(dQ_x)dx + \cdots; (développement\ en\ série\ de\ Taylor)$$

$$dQ_{x+dx} = -K.dydz.\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-K.dydz.\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx$$

$$dQ_{x+dx} = -K.\frac{\partial}{\partial x}\left[T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right]dydz$$

Le bilan énergétique sur l'élément (dV) implique que la chaleur transportée à travers la surface à gauche de (dV) dans la direction (x) plus la quantité de chaleur générée dans (dV) est égale à la chaleur transportée à travers la surface à droite de (dV) dans la direction (x) plus le changement en énergie interne.

Le bilan thermique relativement à l'axe des (X) est donnée par:

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -K.\cancel{\frac{\partial T}{\partial x}}dydz + K.\cancel{\frac{\partial T}{\partial x}}dydz + K.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dxdydz = \frac{\partial}{\partial x}\left[K\frac{\partial T}{\partial x}\right]dxdydz$$

$$\Rightarrow dQ_x - dQ_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K\frac{\partial T}{\partial x}\right]dxdydz \qquad (2\text{-}1)$$

– suivant l'axe des (y) :

$$\Rightarrow dQ_y - dQ_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left[K\frac{\partial T}{\partial y}\right] dxdydz \qquad (2\text{-}2)$$

– suivant l'axe des (Z) :

$$\Rightarrow dQ_z - dQ_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K\frac{\partial T}{\partial z}\right] dxdydz \qquad (2\text{-}3)$$

Suivant les trois directions, le bilan des quantités de chaleur transmises par conduction à travers le volume (dV) est donné par :

$$dQ_x - dQ_{x+dx} + dQ_y - dQ_{y+dy} + dQ_z - dQ_{z+dz}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right] dxdydz \qquad (2\text{-}3')$$

– Soit la quantité $Q'(x, y, z, t)$ est définit comme étant, le taux de génération de l'énergie par unité de volume à l'intérieur du volume de contrôle.

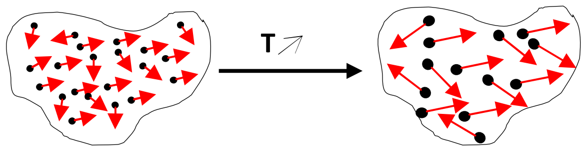
$$Q'(x, y, z, t) \qquad (2\text{-}4)$$

$\Rightarrow$L'ensemble de la chaleur transmise par conduction et celle générée à l'intérieur du (VC), s'accouplent pour augmenter l'énergie interne de l'élément de volume (dV), avec la quantité (dQ) donnée par:

$$dQ = m.C_p dT = \rho.dV.C_p dT = \rho c dxdydz\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2\text{-}5)$$

(C_p=c) : la chaleur spécifique du matériau.

d'où l'énergie interne provient du mouvement aléatoire des molécules dans le système de (volume, dv), le mouvement des molécules est fonction de la température donc, l'énergie interne est équivalente à une énergie thermique.



Le bilan énergétique final implique que :

La chaleur entrée par conduction(1) + La chaleur générée dans l'élément (dV) (2)=la chaleur dissipée par conduction (3)+le changement en énergie interne (4), (*voir schéma ci-dessous).

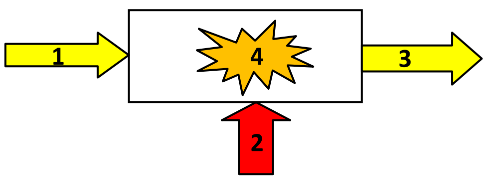


Fig.2-2: Schéma de bilan énergétique

– Le bilan énergétique final est donné par [(2-5) = (2-3’) + (2-4)] :

$$\rho c dx\cancel{dy}dz\frac{\partial T}{\partial t}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]dx\cancel{dy}dz+Q'(x,y,z,t)dx\cancel{dy}dz$$

$$\Rightarrow \rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right)+Q' \qquad (2\text{-}6)$$

– Puisque les propriétés des matériaux (K, ρ et C) sont des variables dépendantes des coordonnées (x, y et z) ainsi que le temps (t), cette équation générale de conduction (2-6) est valable même pour les milieux hétérogènes anisotropes.

– Pour les corps isotropes et homogènes, cette équation peut être arrangée sous formes suivantes:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{K}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\frac{Q'}{\rho c} \qquad (2\text{-}7)$$

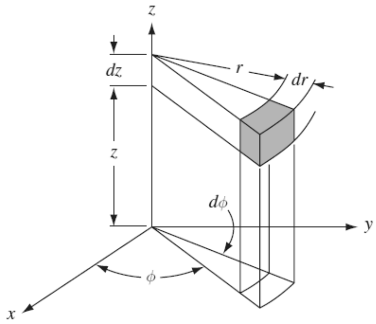
$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha.\nabla^2 T+\frac{Q'}{\rho c} \qquad (2\text{-}8)$$

Où $\alpha=(K/\rho c)$ est le coefficient de diffusivité thermique.

II-2) Equation différentielle générale de la conduction en coordonnées cylindriques

Soient : $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$

$\Rightarrow$ L’équation générale de la chaleur (2-7) en coordonnées cylindriques s’écrit:



$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\frac{Q'}{\rho c} \qquad (2\text{-}9)$$

Fig.2-3: Système de coordonnées cylindriques

II-3) Equation différentielle générale de la conduction en coordonnées sphériques

Soient $\begin{cases} x = r\cos\phi\sin\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$\Rightarrow$ L’équation générale de la chaleur (2-7) en coordonnées sphériques s’écrit:

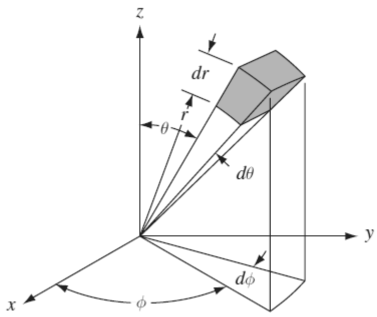


Fig.2-4: Système de coordonnées sphériques

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}\right\}+\frac{Q'}{\rho c} \qquad (2\text{-}10)$$

II-4) Conditions aux limites

La formulation mathématique du problème de conduction par L'équation générale aux dérivées partielles (2-6, 2-9 et 2-10), n'a de sens physique que pour des conditions aux limites définies préalablement et qui reflètent l'évolution réel du phénomène.

II-5) Résolution de l'équation différentielle générale de la chaleur en régime permanent (conduction stationnaire) :

- En régime permanent ; $\frac{\partial}{\partial t} \to 0$
- Sans source de chaleur ; Q'→0

II-5-1) géométrie prismatique (le mur plan)

En plus des hypothèses précédentes, on suppose que :

- Le mur est considéré comme un milieu homogène et conducteur de l'énergie thermique.
- Le mur est limité par deux plans parallèles infinis, maintenus à une température uniforme sur chaque plan extrême.
- Une conduction unidimensionnelle ;($\frac{\partial}{\partial y} \to 0$), ($\frac{\partial}{\partial z} \to 0$)

⇒ L'équation (2-7) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right) dx = \frac{dT}{dx} = C_1$$

$$\int \frac{d}{dx}(T)\, dx = T(x) = C_1 x + C_2$$

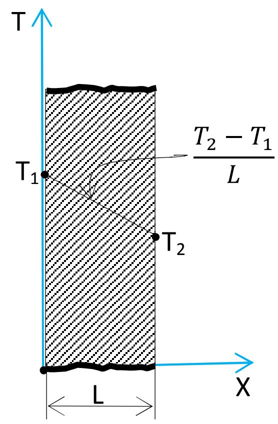


Fig.2-5: Mur plan

Les constantes d'intégration C_1 et C_2, sont déterminées à partir des conditions aux limites ci-dessous:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{à } x = 0; & T(0) = T_1 = C_2 \\ \text{à } x = L; \ T(L) = T_2 = C_1 L + C_2 = C_1 L + T_1 \Rightarrow & C_1 = \dfrac{T_2 - T_1}{L} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

La loi de Fourier permet d'exprimer le flux de chaleur par:

$$\emptyset = -K.S.\frac{dT}{dx};\ \frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}, \Rightarrow \emptyset = K.S.\frac{T_1 - T_2}{L}$$

Le rapport: $\frac{\Delta T}{\Delta x}$, représente la pente de la droite sur la figure (**Fig.2-5)** ci-dessus.

II-5-2) géométrie cylindrique (cylindre creux à surfaces latérales isothermes)

Le transfert de chaleur se fait dans une seule direction (r) ;

L'équation (2-9) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{d^2 T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0$$

$$\int \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)dr=r\frac{dT}{dr}=C_1$$

$$\int dT=C_1\int\frac{dr}{r}\Rightarrow T(r)=C_1\ln(r)+C_2$$

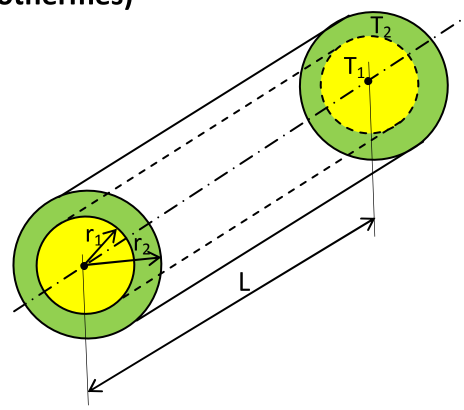


Fig.2-6: Cylindre creux

Les constantes d'intégration C_1 et C_2, sont déterminées à partir des conditions aux limites ci-dessous:

$$\begin{cases}\text{à } r=r_1 : T(r_1)=T_1=C_1\ln(r_1)+C_2 & (a)\\ \text{à } r=r_2 : T(r_2)=T_2=C_1\ln(r_2)+C_2 & (b)\end{cases}$$

(a)-(b) : $T_1-T_2=C_1(\ln(r_1)-\ln(r_2))=C_1.ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\Rightarrow C_1=(T_1-T_2)/ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$

En remplaçant C_1 par son expression dans (a), nous obtenons C_2 par:

$$C_2=T_1-(T_1-T_2).ln\,(r_1)/ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

En remplaçant C_1 par son expression dans (b), nous obtenons C_2 par:

$$C_2=T_2-(T_1-T_2).ln\,(r_2)/ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow T(r)=\frac{(T_1-T_2)}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}ln(r)+T_1-(T_1-T_2).\frac{ln(r_1)}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}=\frac{(T_1-T_2)}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}.ln\left(\frac{r}{r_1}\right)+T_1$$

$$\Rightarrow T(r)=T_1+\frac{(T_1-T_2)}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}.ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \qquad (2-12)$$

- L'expression de la densité de flux thermique est donnée par:

  $$\varphi=-K\frac{dT}{dr}=-K\frac{(T_1-T_2)}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}.\frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{r}{r_1}}=-K\frac{(T_1-T_2)}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}.\frac{1}{r}$$

- L'expression de flux thermique est donnée par:

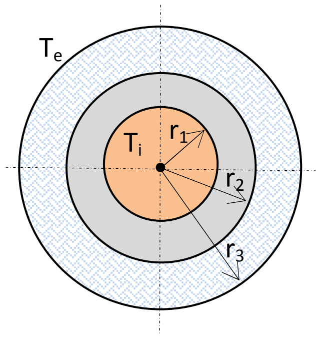
  $$\emptyset=\varphi.S=-K\frac{(T_1-T_2)}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}.\frac{1}{r}.2\pi r.L=2\pi KL.\frac{(T_1-T_2)}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

- L'expression de la résistance thermique est donnée par: $R=\frac{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi KL}$

Exemple1

Calculer le flux de chaleur perdu par unité de longueur d'un tuyau en acier (K_{ac}=38Kcal/h.m.^{o}C), de 48mm de diamètre intérieur et 56mm de diamètre extérieur, recouvert d'un isolant en amiante(K_{am}=0,15Kcal/h.m.^{o}C), de 75mm de diamètre extérieur. De la vapeur à 145^{o}C s'écoule dans le tuyau. La résistance thermique totale à la paroi intérieure est $0{,}2\dfrac{^oC.m}{kcal/h}$ et la température ambiante est de 21^{o}C.

Solution



$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{éq}} = \frac{T_i - T_e}{\sum R_i} = \frac{T_i - T_e}{R_{ac} + R_{am} + R_{vap}}$$

1. Résistance thermique du tube d'acier : $R_{ac} = \dfrac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi.K_{ac}.L}$
2. Résistance thermique de l'isolant d'amiante : $R_{am} = \dfrac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2\pi.K_{am}.L}$
3. Résistance thermique de la vapeur d'eau : $R_{vap} = 0{,}2\dfrac{^oC.m}{kcal/h}$ (par unité de longueur)

$$\Rightarrow \frac{\Phi}{L} = \frac{T_i - T_e}{\dfrac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi.K_{ac}} + \dfrac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2\pi.K_{am}} + R_{vap}} = \frac{(145-21)^oC}{\dfrac{\ln\frac{28}{24}}{2\pi.38.1{,}16\frac{W}{^oC.m}} + \dfrac{\ln\frac{37.5}{28}}{2\pi.0{,}15.1{,}16\frac{W}{^oC.m}} + \dfrac{0{,}2}{1{,}16}\dfrac{^oC.m}{W}} = 281{,}7183\frac{W}{m}$$

II-5-3) Géométrie sphérique (Sphère creuse à surfaces isothermes)

Avec les hypothèses précédentes et en supposant que le transfert de chaleur se fait dans une seule direction (r), l'équation (2-10) se réduit à :

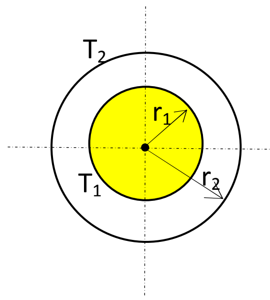


Fig.2-7: Sphère creuse

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{d^2(rT)}{dr^2} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(rT)}{dr^2} = \frac{1}{r}.\frac{d}{dr}\left[\frac{d}{dr}(rT)\right] = \frac{1}{r}.\frac{d}{dr}\left[T + r\frac{dT}{dr}\right] = \frac{1}{r}.\left[\frac{dT}{dr} + \frac{dT}{dr} + r\frac{d^2T}{dr^2}\right] = 0$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

On peut déterminer la solution par changement de variables:

$$u = \frac{dT}{dr} \Rightarrow u' = \frac{d^2T}{dr^2}$$

$$ru' + 2u = 0$$

$$r\frac{du}{dr} + 2u = 0 \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -2\int \frac{dr}{r} \Leftrightarrow \ln(u) = -2\ln(r) + lnC_1 = -\ln(r^2) + lnC_1 = \ln\left(\frac{C_1}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{C_1}{r^2} = \frac{dT}{dr} \Leftrightarrow dT = C_1\frac{dr}{r^2} \Rightarrow T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Pour déterminer les constantes C_1 et C_2, on doit utiliser les conditions aux limites relatives au cas considéré :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{à } r = r_1 : T(r_1) = -\dfrac{C_1}{r_1} + C_2 = T_1 & (a) \\ \text{à } r = r_2 : T(r_2) = -\dfrac{C_1}{r_2} + C_2 = T_2 & (b) \end{array}\right\}$$

(a)-(b)=$T_1 - T_2 = -\frac{C_1}{r_1} + \frac{C_1}{r_2} = -C_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow C_1 = -\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$

En remplaçant C_1 par son expression dans (a), on trouve l'expression de C_2 :

$$T_1 = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 = \frac{\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}}{r_1} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).r_1}$$

- L'expression finale de la température est donnée par :

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}.\frac{1}{r} + T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).r_1} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right] + T_1$$

$$\Rightarrow T(r) = T_1 + (T_1 - T_2).\frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

- L'expression de la densité de flux thermique est donnée par :

$$\varphi = -K\frac{dT}{dr} = K.\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}.\frac{1}{r^2} \; ; \frac{dT}{dr} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}.\left(-\frac{1}{r^2}\right)$$

- L'expression de flux thermique est donnée par :

$$\emptyset = \varphi.S = -KS\frac{dT}{dr} \; ; \frac{dT}{dr} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}.\left(-\frac{1}{r^2}\right) \; ; S = 4\pi r^2$$

$$\emptyset = -K.4\pi\cancel{r^2}.\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}.\left(-\frac{1}{\cancel{r^2}}\right) = 4\pi K\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\pi K}}$$

- L'expression de la résistance thermique est donnée par: $R = \frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\pi K}$