

Chapitre III: Conduction bidimensionnelle en régime permanent

III-1) Concept de facteur de forme entre deux surfaces isothermes (surfaces équivalentes)

Dans un système bidimensionnel, où seulement deux températures limites sont imposées, on peut exprimer le facteur de forme en conduction (f_t) tel que:

$$\phi = k \cdot f_t \cdot \Delta T \quad (3-1)$$

Les valeurs de (f_t), peuvent être déterminées pour différentes géométries.

III-1-1) Facteur de forme pour une paroi prismatique (Mur 3D)

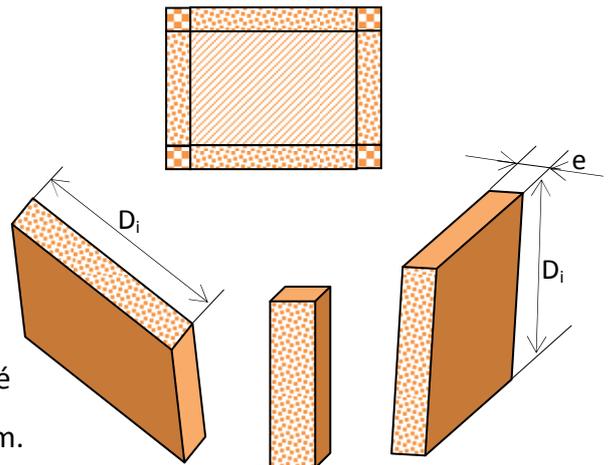
➤ Pour un mur plan, le flux thermique (ϕ) est donné par:

$$\phi = k \cdot \frac{S}{e} (T_1 - T_2) = k \cdot f_t \cdot (T_1 - T_2) \quad (3-2)$$

$\Rightarrow f_t = \frac{S}{e}$, S: surface de mur, e: l'épaisseur de mur.

➤ Pour un mur tridimensionnel (Four par exemple), différents facteurs de forme sont utilisés pour calculer le flux thermique à travers les sections des coins et des bordures, dans le cas où toutes les dimensions intérieures sont supérieures à (1/15) de l'épaisseur de mur.

$$\begin{cases} f_p = \frac{S}{e}; \\ f_b = 0.54 D_i; \\ f_c = 0.15 e; \\ D_i: \text{longueur de bordure} \end{cases}$$



Exemple 1

Un four de forme cubique, de dimensions intérieures (48×48×48) cm est construit de briques de conductivité thermique ($k=1.04 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$), avec une épaisseur de 8cm.

La température à l'intérieur du four est de 478°C , à l'extérieur est de 42°C . Calculer le flux thermique dissipé à travers les murs de four.

Fig.3-1: Représentation schématique pour le calcul des facteurs de formes 3D

Solution

On calcule le facteur de forme total par addition des facteurs de parois, de bordures et des coins.

- $f_p = \frac{S}{e} = \frac{0.48 \times 0.48}{0.08} = 2.88 \text{ m}$
- $f_b = 0.54 D = 0.54 \times 0.48 = 0.2592 \text{ m}$
- $f_c = 0.15 e = 0.15 \times 0.08 = 0.012 \text{ m}$

Il y a: six sections de parois, douze bordures et huit coins.

$$\Rightarrow f_t = 6 \cdot (2.88) + 12 \cdot (0.2592) + 8 \cdot (0.012) = 20.4864 \text{ m}.$$

$$\Rightarrow \phi = k \cdot f_t \cdot \Delta T = 1.04 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{C}} \right] \times 20.4864 [\text{m}] \times (478 - 42)[\text{C}] = 9289,35 \text{ W}$$

III-1-2) Facteur de forme pour une paroi cylindrique

On peut exprimer les flux thermiques pour une paroi cylindrique ou une paroi sphérique avec une méthode analogue à celle de mur plan. Donc, pour une paroi cylindrique:

$$\phi = k \cdot \frac{S_{\acute{e}q}}{e} (T_1 - T_2) \quad (3-3)$$

Avec; $e=r_1-r_2$, pour un cylindre creux (voir figure: **Fig.2-6**)

$$\begin{aligned} \phi &= k \cdot \frac{S_{\acute{e}q}}{e} (T_1 - T_2) = k \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{S_{\acute{e}q}}} = k \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L}} \\ \frac{S_{\acute{e}q}}{e} &= \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)} \Rightarrow S_{\acute{e}q} = \frac{2\pi L \cdot e}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi L(r_2-r_1)}{\ln(2\pi L r_2 / 2\pi L r_1)} = \frac{S_2 - S_1}{\ln(S_2/S_1)}; f = \frac{S_{\acute{e}q}}{e} \\ \Rightarrow \phi &= k \cdot \frac{S_{\acute{e}q}}{e} (T_1 - T_2) = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{S_{\acute{e}q} \cdot k}} \end{aligned}$$

Avec $(\frac{e}{S_{\acute{e}q} \cdot k})$, exprime aussi la résistance thermique de la couche cylindrique.

Remarque: S varie entre S_1 et S_2 , selon la loi: $S = 2\pi L \cdot r = K \cdot r$; donc S est proportionnelle au rayon r c'est à dire, lorsque $(r \uparrow \Rightarrow S \uparrow)$.

III-1-3) Facteur de forme pour une paroi sphérique

$$\begin{aligned} \phi &= k \cdot \frac{S_{\acute{e}q}}{e} (T_1 - T_2) = k \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{S_{\acute{e}q}}} = k \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})/4\pi}{}} \Rightarrow \frac{S_{\acute{e}q}}{e} = \frac{4\pi}{(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})} \Leftrightarrow S_{\acute{e}q} = \frac{4\pi e}{(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})} = \frac{4\pi(r_2-r_1)}{\frac{(r_2-r_1)}{r_1 r_2}} = 4\pi r_1 r_2; \\ \Rightarrow S_{\acute{e}q} &= 4\pi r_1 r_2 = (2\sqrt{\pi} r_1)(2\sqrt{\pi} r_2) = \sqrt{4\pi r_1^2} \times \sqrt{4\pi r_2^2} = \sqrt{(4\pi r_1^2)(4\pi r_2^2)} = \sqrt{S_1 \times S_2}; \\ S_{\acute{e}q} &= \sqrt{S_1 \times S_2}; f = \frac{S_{\acute{e}q}}{e}, \text{ (voir figure: Fig.2-7).} \end{aligned}$$

Remarque: $(\frac{e}{S_{\acute{e}q} \cdot k})$, représente aussi dans ce cas, la résistance thermique de la couche sphérique. S, varie entre (S_1) et (S_2) selon la loi: $S = 4\pi r^2 = K \cdot r^2$; S est proportionnelle à (r^2) , c'est à dire: lorsque $(r^2 \uparrow \Rightarrow S \uparrow)$.

Exemple 2

Un cône en fer de conductivité thermique, $k=45$ [kcal/h.m.C].

A $x=0$, $T_1=70^\circ\text{C}$, $D_1=38\text{mm}$. A $x=H=78\text{mm}$, $T_2=35^\circ\text{C}$, $D_2=88\text{mm}$.

Calculer le flux thermique ϕ .

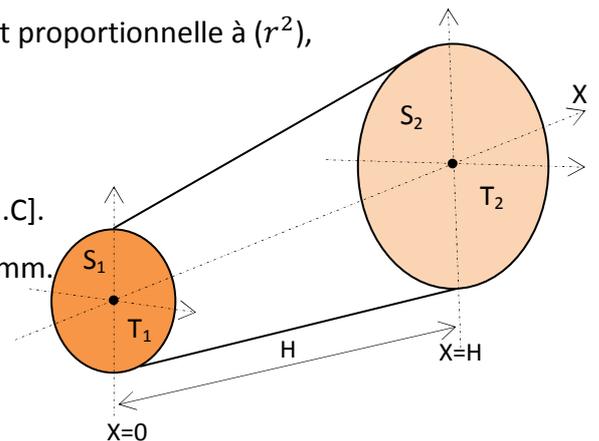
Solution

Il faut connaitre comment évolue la surface du cône entre S_1 et S_2 .

$S_1=\pi \cdot r_1^2$, $S_2=\pi \cdot r_2^2 \Rightarrow S$, varie en r^2 , on applique la loi d'une surface équivalente pour une paroi sphérique.

$$\Rightarrow S_{\acute{e}q} = \sqrt{S_1 \cdot S_2} = \sqrt{(\pi r_1^2) \cdot (\pi r_2^2)} = \sqrt{(\pi \cdot (19 \cdot 10^{-3})^2) \cdot (\pi \cdot (44 \cdot 10^{-3})^2)} = 2.6263 \cdot 10^{-3} \text{m}^2$$

$$e=H=78 \cdot 10^{-3} \text{m}$$



$$\phi = 45 \frac{kcal}{h.m.C} . 2.6263 \cdot 10^{-3} m^2 (70 - 35) C = 4.1365 kcal/h$$

III-2) L'analogie électrique et ses limites

- L'expression de la densité de flux conductif donné par la loi de Fourier: $\varphi = -k(T) \cdot \nabla T$ est analogue à la loi d'ohm: $\vec{I} = \sigma(T) \cdot \vec{E} \Leftrightarrow I = \sigma(T) \cdot \nabla U$, tels que:

\vec{I} : le vecteur densité de courant;

\vec{E} : le champ électrique;

$\sigma(T)$: la conductivité électrique;

U: le potentiel électrique.

⇒ Donc, les correspondances évidentes entre les grandeurs électriques et thermiques sont:

- Conductivité: $\sigma(T) \Leftrightarrow k(T)$;
- Potentiel U \Leftrightarrow température T;
- Intensité de courant I \Leftrightarrow densité de flux conductif.

Dans les deux cas, les isothermes (équipotentiels) sont normales aux lignes et aux tubes de flux (lignes et tubes de courant).

L'intérêt en régime stationnaire de l'analogie électrique est:

- L'application des lois de mouvement (les techniques simples de l'électrocinétique linéaire et stationnaire);
- L'introduction des notions de résistance et de conductivité dans le cas thermique;
- L'usage des relations d'association en série et en parallèle dans le cas thermique;
- L'application des théorèmes de Thévenin et de Norton et les lois de réseau...etc.

Cependant, l'usage de ces méthodes (pour simplifier les schémas des circuits), n'est plus limité (ou valable) qu'en électrocinétique pour deux raisons:

1. les conductivités électriques et thermiques dépendent en général, de la température (T), ceci ne présente que peu d'inconvénient dans le cas de la conduction électrique, mais cette propriété rend les problèmes non linéaires en (T) dans le cas de la conduction thermique. Donc, la conductivité (k), doit être supposée homogène, isotrope et indépendante de la température (T);
2. Le transfert conductif se produit souvent en concurrence avec le transfert radiatif, qui est assez rarement linéarisable. Quand le rayonnement thermique n'est pas linéaire, l'analogie électrique ne peut être utilisée.

III-3) Méthodes numériques (différences finies)

- Sont des méthodes approximatives basées sur la technique appelée différences finies;
- Le but étant d'approximer l'équation différentielle et les conditions aux limites par un système d'équations algébriques;
- Ceci est accompli en subdivisant le domaine étudié en une série d'éléments finis;
- Le plan (x, y) est découpé en un réseau de mailles, chaque élément de réseau est sous l'influence des éléments qui l'entourent;
- Les points nodaux sont désignés par les indices (m: dans la direction x, n: dans la direction y).

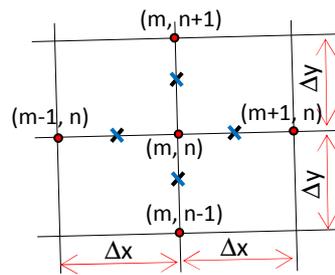


Fig.3-2: Volume de contrôle typique du maillage

Soit l'équation différentielle:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3-4)$$

On utilise la technique (méthode) de différences finies pour approximer les gradients de température.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m+\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x},$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m-\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n+\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n-\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{m,n} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m,n} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m+\frac{1}{2},n} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} \approx \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{m,n} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \approx \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

L'approximation par différences finies de l'équation différentielle devient:

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0$$

$$\text{Si } \Delta x = \Delta y, \text{ donc: } T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0 \quad (3-5)$$

Exemple 4

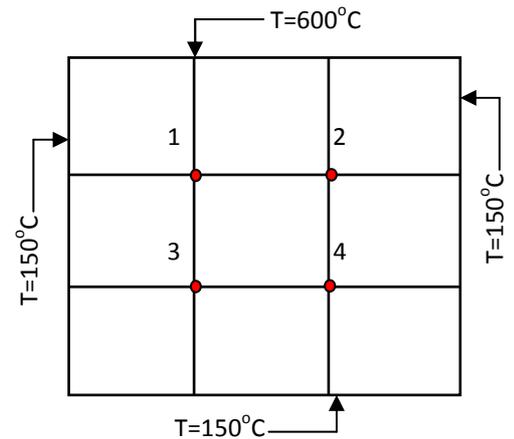
Soit l'exemple illustré sur la figure ci-contre.

Déterminer les températures des quatre nœuds (1,2,3 et 4)

En utilisant l'équation (3-5), nous aurons quatre équations pour chaque nœuds (1, 2, 3 et 4).

Solution

Le nœud (1) est influencé par quatre nœuds adjacents (2,3, 150°C et 600°C).



$$T_{m+1,n}=T_2, T_{m-1,n}=150^\circ\text{C}, T_{m,n+1}=600^\circ\text{C}, T_{m,n-1}=T_3, T_{m,n}=T_1.$$

$$T_2+150+600+T_3-4T_1=0 \quad (1)$$

De la même manière pour le nœud (2):

$$T_1+T_4+150+600-4T_2=0 \quad (2)$$

De la même manière pour le nœud (3):

$$T_1+T_4+150+150-4T_3=0 \quad (3)$$

De la même manière pour le nœud (4):

$$T_3+T_2+150+150-4T_4=0 \quad (4)$$

$$(1)-(4) \Rightarrow T_1=112,5+T_4 \quad (5)$$

$$(2)-(3) \Rightarrow T_2=112,5+T_3 \quad (6)$$

$$(5) \rightarrow (2) \Rightarrow T_4=2T_2-431,25 \quad (7)$$

$$(6) \rightarrow (4) \Rightarrow T_3=2T_4-206,25 \quad (8)$$

$$(8) \rightarrow (6) \Rightarrow T_2=2T_4-93,75 \quad (9)$$

$$(9) \rightarrow (7) \Rightarrow T_4=206,25^\circ\text{C}, T_2=318,75^\circ\text{C}, T_1=318,75^\circ\text{C}, T_3=206,25^\circ\text{C}.$$

III-4) Analyse mathématique de la conduction bidimensionnelle

Le but de chaque procédure d'analyse du phénomène de transfert thermique est la détermination de la distribution de la température et le flux de chaleur. Dans un système bidimensionnel et sans source de la chaleur, l'équation générale de conduction gouvernant la distribution de la température en régime permanent (2-7) se simplifié à:

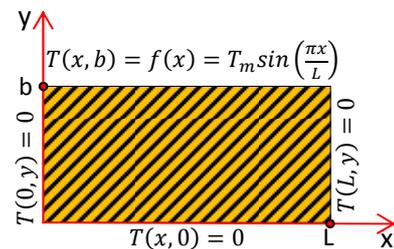
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3-6)$$

La solution analytique d'un problème de conduction thermique doit satisfaire l'équation gouvernante régissant le phénomène ainsi que les conditions aux limites relatives au problème physique considéré. L'approche traditionnel de recherche d'une solution exacte pour l'équation de Fourier, est la méthode de séparation de variables. Donc, Pour la solution (l'intégration) mathématique de cette équation, on utilise la méthode de séparation de variables, qui est basée sur l'idée de supposer la solution sous forme de produit de deux fonctions:

$$X(x) \text{ et } Y(y) \text{ tel que; } T = X.Y \quad (3-7)$$

Considérons une plaque rectangulaire mince, sans sources de chaleur et isolée de deux cotés, les deux surfaces de bas et de haut (inférieure et supérieure) (**Fig.3-3**). Comme montré sur la figure, les conditions aux limites pour ce domaine sont spécifiées comme suit:

$$T(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y = 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \\ 0 & \text{pour } x = L \\ f(x) = T_m \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) & \text{pour } y = b \end{cases}$$



T_m , c'est l'amplitude de la fonction sinus de $f(x)=T(x, b)$.

$$T(x, y) = X(x).Y(y)$$

Fig.3-3: Spécification des C.L sur le domaine de calcul

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dX}{dx} \cdot Y(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = Y \cdot \frac{d^2 X}{dx^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{dY}{dy} \cdot X(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = X \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

$$Y \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + X \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (3-8)$$

On remarque que chaque coté de l'équation (3-8) est indépendant de l'autre, (x et y sont des variables indépendantes). Par conséquent, l'ensemble des deux cotés doit être égal à une constante désignée par ($C^{te}=\lambda^2$).

$$\Rightarrow -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2 = C^{te}$$

On aura par suite les deux équations différentielles ordinaires:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (3-9)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad (3-10)$$

Les solutions générales des équations (3-9) et (3-10) sont données par:

$$\begin{cases} X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \end{cases} \quad (3-11)$$

$$\begin{cases} Y = C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y} \end{cases} \quad (3-12)$$

Par suite;

$$T(x, y) = X(x) \cdot Y(y) = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) \cdot (C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y})$$

Les constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 sont déterminées à partir des conditions aux limites spécifiées sur la figure (**Fig.3-3**).

– A partir de la première condition:

$$(C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) \cdot (C_3 + C_4) = 0$$

– A partir de la deuxième condition:

$$C_1 \cdot (C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}) = 0$$

– A partir de la troisième condition:

$$(C_1 \cos \lambda L + C_2 \sin \lambda L) \cdot (C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}) = 0$$

La première condition ne peut être satisfaite que si les constantes ($C_3 = -C_4$), par contre, la deuxième condition ne peut être satisfaite que dans le cas où; $C_1 = 0$. En utilisant ces constatations dans la troisième condition, on peut écrire:

$$2C_2 C_3 \sin \lambda L \operatorname{sh} \lambda y = 0$$

Pour satisfaire cette condition:

$$\sin \lambda L = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots \text{entiers}, \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

$n=0$, est exclue puisque elle donne une solution triviale ($T(x, y)=0$).

Par conséquent, on aura pour chaque entier (n), une solution différente et chacune a une constante d'intégration (K_n) séparément de l'autre. La sommation de ces solutions donne:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

La quatrième condition implique que pour $y=b$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) = T_m \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

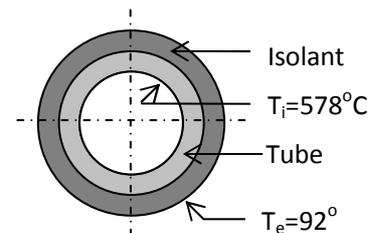
Donc, on ne peut retenir que le premier terme (avec, $K_1 = T_m / \operatorname{sh}(\pi b / L)$) à partir de la série des solution, par suite, la solution finale pour ce cas particulier (problème illustré sur la figure, **Fig.3-3**) est donnée par:

$$T(x, y) = T_m \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi y}{L}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi b}{L}\right)} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Exercice 1

Un tube en acier inoxydable ($k=19\text{W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$) avec 3cm de diamètre intérieur et 5cm de diamètre extérieur est isolé par une couche d'amiante ($k=0,2\text{ W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$) de 2,5cm d'épaisseur (voir figure ci-dessous). Sachant que la température de la paroi interne de tube est maintenue à 578°C et celle de la paroi externe de l'isolant est à 92°C .

1. Calculer le flux de chaleur perdu par mètre de longueur.
2. Donner le schéma électrique équivalent.
3. Quelle est l'importance de l'utilisation de l'analogie existant entre les grandeurs thermiques et électriques?.



Solution1

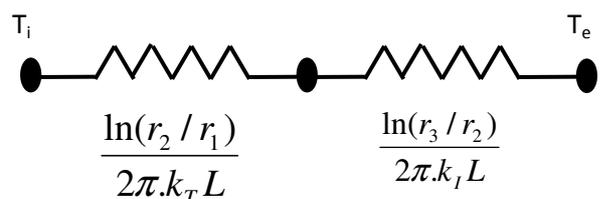
1. Le flux de chaleur perdu par mètre de longueur:

$$\Phi = \frac{\Delta T}{\Sigma R_i} = \frac{T_i - T_e}{R_T + R_I}, R_T = \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi \cdot k_T L}, R_I = \frac{\ln(r_3 / r_2)}{2\pi \cdot k_I L}$$

$$\Phi = \frac{2\pi \cdot L(T_i - T_e)}{\frac{\ln(r_2 / r_1)}{k_T} + \frac{\ln(r_3 / r_2)}{k_I}} \Rightarrow \frac{\Phi}{L} = \frac{2\pi(T_i - T_e)}{\frac{\ln(r_2 / r_1)}{k_T} + \frac{\ln(r_3 / r_2)}{k_I}}$$

$$\frac{\Phi}{L} = \frac{2\pi \cdot (578 - 92)}{\frac{\ln(2.5/1.5)}{19} + \frac{\ln(5/2.5)}{0,2}} = 874,3087 \text{ W / m}$$

2. Schéma électrique équivalent:



3. L'importance de l'analogie existant entre les grandeurs thermiques et électriques:

l'application des techniques simples de l'électrocinétique linéaire et stationnaire, l'introduction des notions de résistance et de conductance, l'association en série et en parallèle, théorèmes de Thévenin, de Norton, lois des réseaux ...etc. Pour simplifier les schémas des circuits thermiques.

Exercice 2

Soit le réseau de nœuds illustré ci-contre appartenant à un solide de conductivité thermique ($k=10W/m.°C$).

Calculez grâce à une méthode numérique

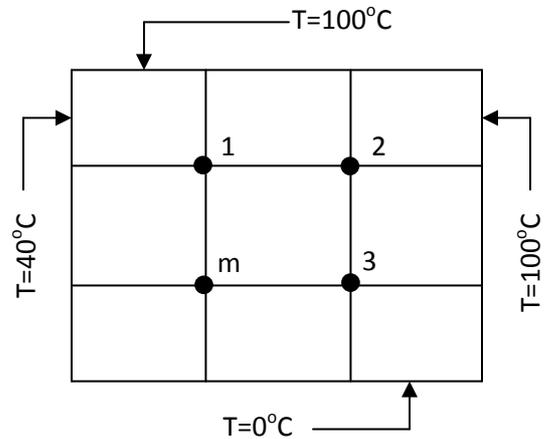
les températures des nœuds (1, 2, 3) ;

($\Delta X=\Delta Y$; $T_m=40°C$).

$$\begin{cases} 40 + 100 + T_m + T_2 - 4T_1 = 0 \\ T_1 + 100 + T_3 + 100 - 4T_2 = 0 \\ T_2 + T_m + 0 + 100 - 4T_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4T_1 + T_2 + 0T_3 = -180 \\ T_1 - 4T_2 + T_3 = -200 \\ 0T_1 + T_2 - 4T_3 = -140 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -180 \\ -200 \\ -140 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [A].[T] = [C] \Rightarrow [T] = [A]^{-1}].[C]$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det A} . A^{ct} ; \det A = -56 ; A^{ct} = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{56} \begin{bmatrix} 15 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -180 \\ -200 \\ -140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 \\ 80 \\ 55 \end{bmatrix}$$



Exercice 3

Soit le système bidimensionnel illustré ci-contre,

avec les conditions aux limites indiquées sur la figure.

Calculer les températures des nœuds 1, 2, 3 si $T_m=346°C$

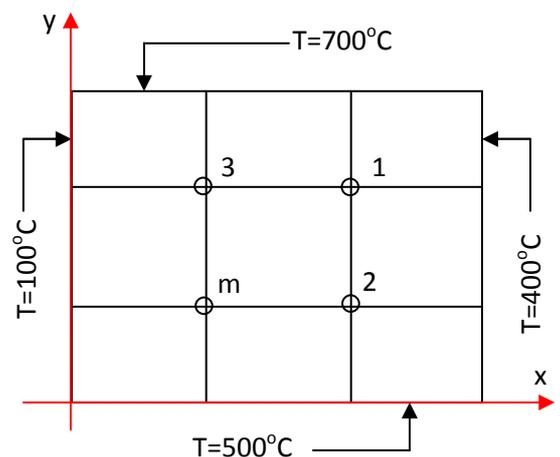
et ($\Delta x=\Delta y$), en utilisant la méthode numérique par différence.

Solution

Par application de l'équation (3-5)

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

$$\begin{cases} T_2 + T_3 + 700 + 400 - 4T_1 = 0 \\ T_1 + T_m + 500 + 400 - 4T_2 = 0 \\ T_1 + T_m + 100 + 700 - 4T_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4T_1 + T_2 + T_3 = -1100 \\ T_1 - 4T_2 + 0T_3 = -1246 \\ T_1 + 0T_2 - 4T_3 = -1146 \end{cases}$$



Sous forme matricielle:

$$[A] \cdot [T] = [C]$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1100 \\ -1246 \\ -1146 \end{bmatrix}$$

$$[T] = [A]^{-1} \cdot [C], [A]^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{ct}, \det A = (-1)^{i+j} |A|_i, A^t = [M_{ij}] \Rightarrow A^{ct} = [M_{ji}]$$

$$\det A = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + \dots = -56$$

$$A^t = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}, A^{ct} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & M_{31} \\ M_{12} & M_{22} & M_{32} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{12} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\dots = \dots \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots;$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 15 & 1 \\ 4 & 1 & 15 \end{bmatrix}, A^{ct} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 15 & 1 \\ 4 & 1 & 15 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-56} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 15 & 1 \\ 4 & 1 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1100 \\ -1246 \\ -1146 \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{-56} [16 \cdot (-1100) + 4 \cdot (-1246) + 4 \cdot (-1146)] = 485,14 \text{ C} \\ T_2 = \frac{1}{-56} [4 \cdot (-1100) + 15 \cdot (-1246) + 1 \cdot (-1146)] = 432,78 \text{ C} \\ T_3 = \frac{1}{-56} [4 \cdot (-1100) + 1 \cdot (-1246) + 15 \cdot (-1146)] = 407,78 \text{ C} \end{cases}$$

Vérification

$$-4 \cdot (485,14) + 432,78 + 407,78 = -1100 \text{ C}$$