Chapitre 2 :
Equations aux Dérivées Partielles

2.1 Introduction

Les **Equations aux Dérivées Partielles (EDP)** interviennent dans la description de très nombreux problèmes de l'électronique, physique, chimie, sciences de la terre, biologie...etc.
Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, la prévision météorologique, la démographie, ou les finances (équation de Black-Scholes). Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale, de la mécanique quantique (équation de Schrödinger), d'électromagnétisme (équations de Maxwell), et de la mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes), sont également des EDP. Ce sont des équations indispensables pour la résolution de presque la totalité des problèmes dans ces domaines.

Une équation différentielle aux dérivées partielles ou EDP, estune relation faisant intervenir une fonction inconnue $u$de $\mathbb{R}^n$dans $\mathbb{R}$, les variables $(x, y, \ldots,) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles, qu'on peut écrire sous la forme :

$$F\left(x, y, \ldots . u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots . \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u_{yy}, \ldots . .\right) = 0 \tag{2.1}$$

Exemple

- l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ avec $u = u(x, y)$ qui admet comme solutions : $u(x, y) = 2x + y^2$, $u(x, y) = e^{-x}\sin(y)$.....
- l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ avec $u = u(x, y)$ qui admet comme solutions : $u(x, y) = (x + y)^3$, $u(x, y) = \sin(x - y)$.....

2.2 Généralités sur les EDP

2.2.1 Définitions

Définition 1

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivéepartielle le plus élevé intervenant dans l'équation.

Exemple

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ $et\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1$ 1^{er}Ordre

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 2^{eme}Ordre

Définition 2 : Si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément et "***à la puissance 1***" dans l'EDP, celle-ci est dite **linéaire. Si** on multiplie par une fonction qui dépend elle-même de la solution, celle-ci est dite **non linéaire.**

Exemple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \textit{EDP Linéaire}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \text{et } u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = y \qquad \textit{EDPs Non Linéaire}$$

Définition 3

Une équation aux dérivées partielles est dite **homogène** si elle est vérifiéepour $u = 0$(tous les termes de l'´équation contiennent la fonction $u$ou l'une de ses dérivéespartielles).

2.2.2 EDP du 1er ordre

La forme la plus générale pour une EDP linéaire de deux variables et du 1er ordre est :

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = D(x,y) \qquad (2.2)$$

OùA, B, C *et* Dsont des fonctions.

2.2.3 EDP du 2ème ordre

Une EDP linéaire du 2èmeordre, à coefficients constants s'écrit sous la forme :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \qquad (2.3)$$

Les trois premiers termes correspondent à la **partie principale**. a, b, c, d, e, f *et* g sont desconstantes. Le type de l'EDP dépend du signe de$b^2 - 4ac$.

2.2.4 Classification

- ***Si*** $b^2 - 4ac > 0$, alors l'EDP est dite **hyperbolique.**
- ***Si*** $b^2 - 4ac = 0$, alors l'EDP est dite **parabolique.**
- ***Si*** $b^2 - 4ac < 0$, alors l'EDP est dite **elliptique.**

Exemple

(i) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ *avec* $c > 0$.

$b^2 - 4ac = 4c^2 > 0$.Ainsi **l'équation des ondes** est hyperbolique.

(ii) $\frac{\partial u}{\partial t} - d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ *avec* $d > 0$.

$b^2 - 4ac = 4c^2 = 0$.Ainsi **l'équation de la diffusion** est parabolique.

(iii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *avec* $c > 0$.

$b^2 - 4ac = -4 < 0$.Ainsi **l'équation de Laplace** est elliptique.

(iv) $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *(Equation de Tricomi)*

$$b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(y)(-1) = 4y.$$

- ✓ Si $y > 0 \Rightarrow$ l'EDP est **hyperbolique**.
- ✓ Si $y = 0 \Rightarrow$ l'EDP est **parabolique**.
- ✓ Si $y < 0 \Rightarrow$ l'EDP est **elliptique**.

2.3 Condition aux limites

On doit se donner des « conditions au limites » (CL). L'équation étant vérifiée dans dans un domaine $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ de l'espace (ou espace-temps), on distingue des conditions de 2 types :

a) ***Conditions de Dirichlet*** : on impose la valeur de u sur la bordure de $\boldsymbol{\mathcal{D}}$. Dans le cas où on étudie un problème dépendant du temps, cela inclut des conditions « initiales ».

b) ***Conditions de Neumann*** : c'est la valeur de la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n} = \overrightarrow{gradu}.\vec{n}$ que l'on impose.

c) ***Condition de Cauchy :*** on a une combinaison des deux selon différentes parties de la bordure (imposer une double condition Dirichlet/Neumann).

À titre d'exemple pour l'équation de la chaleur :

- Des CL de Dirichlet correspondent à des parois isothermes, qui imposent leur température.
- Des CL de Neumann avec$\overrightarrow{gradu}.\vec{n}$ annulent le transfert de chaleur : parois adiabatiques (sans perte ou gain de chaleur, **cela n'implique pas pour autant que la température du système reste constante, contrairement au cas isotherme**).

2.4 Méthodes de résolution

Les méthodes numériques ne donnent pas la solution véritable du problème que l'on cherche à résoudre. Des méthodes numériques mal utilisées peuvent conduire à des résultats totalement faux. Le but est de savoir comment calculer explicitement une solution approchée qui soit facilement calculable tout en ayant une idée assez précise de l'erreur commise par rapport à la solution exacte? Plusieurs méthodes existent pour cet approche citons : la **méthode des différences finies**, la **méthode des éléments finis** et la **méthode de Galerkin (Ritz)**,...etc.

2.4.1 Méthode des différences finies (MDF)

La **méthode MDF** est très classique, simple à mettre en œuvre et convient pour beaucoup de problèmes rencontrés en pratique. Les calculs sont effectués suivant un **maillage** obtenu par un double réseau de parallèles aux axes et régulièrement espacées.

Elle repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation ou différentiation et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu. Son inconvénient est qu'on se limite à des géométries simples, et qu'il y a des difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

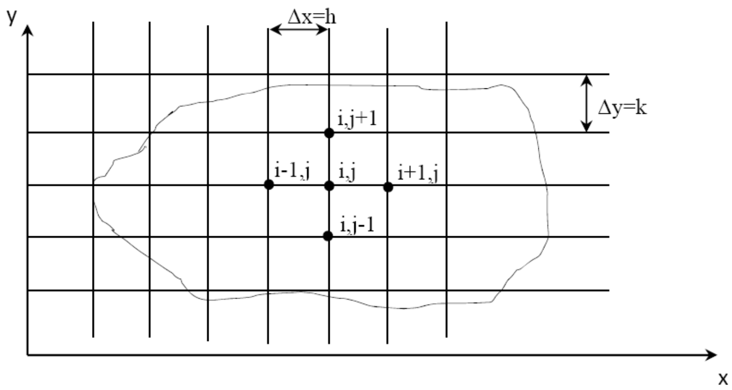
Pour obtenir une approximation numérique de la solution de ce problème, nous devonsapprocher les dérivées partielles de l'E.D.P en chaque nœud du domaine discrétisé (maillage) enutilisant les valeurs de la variable dépendante en ce nœud et aux nœuds avoisinants.

L'intersection de deux droites du maillage définit un nœud M de coordonnées (x_M, y_M).

Si les parallèles à l'axe$x$ sont espacées de $\Delta x = h$ et les parallèles à l'axe $y$de $\Delta y = k$, le noeud acomme coordonnées :

$$x_M = i\Delta x = ih \text{ et} y = j\Delta y = jh$$

Ou d'une manière condensée (i, j).



Maillage

Ainsi la fonction $u(x, y)$prend au point M(x_M, y_m) la valeur $u(i\Delta x, j\Delta y) = u(ih, jh) = u_{i,j}$

Remarque 1:

A chaque étape, nous remarquons que pour calculer la valeur de $\boldsymbol{u_{i,j}}$ *au point* $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_j})$ *nous avons besoin de connaitre les points* $\boldsymbol{u_{i-1,j}}$, $\boldsymbol{u_{i,j-1}}$, $\boldsymbol{u_{i+1,j}}$, $\boldsymbol{u_{i,j+1}}$.

Remarque 2:

Si $\Delta x = \Delta y$le ***maillage*** est dit ***régulier*** sinon il est ***irrégulier***.

2.4.2 Notation indicielle

Durant ces projets nous utiliserons souvent la *notation indicielle*. C'est pourquoi nous voulons en rappeler le principe. Six est un des vecteurs de base du repère (quadrillage) discrétisé, nous noterons le point $x(i)$, qui est la $i^{ème}$abscisse par $x_i$et de même la $j^{ème}$ ordonnée $y(j)$ sera noté$y_j$et si $u$est maintenant la fonction, ici la solution de l'équation aux dérivées partielles dépendant seulement des variables de l'espace, on remplacera $u(x_i, y_j)$par $u_{i,j}$. Si, en plus des variables del'espace, il existe une variable temporelle$t(k) = t_k$, alors la fonction $u(x_i, y_j, t_k)$ sera notée$u_{i,j}^k$.

En résumé, les indices des ***variables*** spatiales resteront en ***indices*** et celui du ***temps*** sera en ***exposant***. C'est ce qu'on appellera la ***notation indicielle.***

2.4.3 Expressions discrètes de la première et deuxième dérivée

La méthode des différences finies pour la résolution des problèmes aux limites remplace chaque dérivée dans l'équation différentielle aux dérivées partielles par une approximation appropriée en termes de rapport aux différences.

En utilisant le développement de Taylor au voisinage du point (x_i, y_i), on obtient :

a) Première dérivée

- Différence en avant :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{U_{i+1}-U_i}{h} \tag{2.4}$$

- Différence en arrière :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{U_i-U_{i-1}}{h} \tag{2.5}$$

- Différence centrée :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h} \tag{2.6}$$

b) Deuxième dérivée

- Différence en avant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i,j}-2U_{i+1,j}+U_{i+2,j}}{h^2} \ \underline{\textbf{ET}} \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j}-2U_{i,j+1}+U_{i,j+2}}{h^2} \tag{2.7}$$

- Différence en arrière :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i-2,j}-2U_{i-1,j}+U_{i,j}}{h^2} \ \underline{\textbf{ET}} \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j-2}-2U_{i,j-1}+U_{i,j}}{h^2} \tag{2.8}$$

- Différence centrée :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{h^2} \ \underline{\textbf{ET}} \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j+1}-2U_{i,j}+U_{i,j-1}}{h^2} \tag{2.9}$$

2.5 Equations elliptiques

On distingue deux équations classiques de ce type :

- Equation de Laplace: $u''_x + u''_y = 0$
- Equation de Poisson : $u''_x + u''_y + g(x,y) = 0$

En général, ces deux équations décrivent des phénomènes non évolutifs en régime permanent (indépendamment des variables temporelles ou du régime permanent). Par exemple, les champs électriques dans les conducteurs, les déplacements et les contraintes dans les corps élastiques, etc.

La forme canonique de l'équation elliptique à deux variables est

$$\nabla^2 u = G. \tag{2.10}$$

Soit un domaine fermé D, avec la frontière S, on définit :

a) Le problème de Dirichlet (position)

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= f \text{ dans } D \\ u &= g \text{ sur } S \end{aligned} \tag{2.11}$$

b) Le problème de Neumann (vitesse)

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= f \text{ dans } D \\ u'_n &= g \text{ sur } S \end{aligned} \tag{2.12}$$

c) Le problème de Fourier ou mixte (position et vitesse)

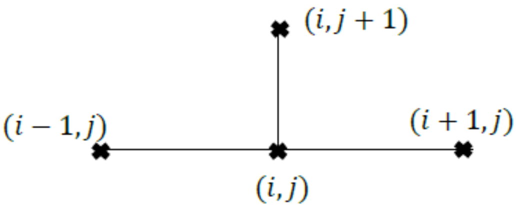
$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= f \text{ dans } D \\ u_n' + ku &= 0 \text{ sur } S \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.6 Equations paraboliques

L'équation la plus simple du type parabolique est une équation de la forme $u_t' = a^2 u_{xx}''$. C'est ce qu'on appelle l'équation de la chaleur ou l'équation de Fourier. Pour bien déterminer la solution de cette équation, la fonction $u(x,t)$ nécessite certaines conditions initiales pour vérifier les conditions aux limites et les conditions au temps initial $t = 0$. Les solutions numériques peuvent être obtenues soit par des schémas explicites, soit par la formule centrée, en avant, en arrière ou dans une combinaison d'expressions.

a) Schéma explicite

Dans le schéma explicite la solution $u_{i,j+1}$ est calculee directement en appliquant le schéma centré sur les termes $u_{i-1,j}, u_{ij}$ et $u_{i+1,j}$, dont le système (la maille) de résolution est itératif.



Au point (ih, jk), pour

$$\begin{cases} u_t' = \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) \\ u_{xx}'' = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \end{cases} \tag{2.14}$$

On remplace dans l'équation de chaleur :

$$\frac{1}{k}(u_{ij+1} - u_{ij}) = a^2 * \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}),$$

d'où :

$$u_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2ka^2}{h^2}\right)u_{i,j} + \frac{ka^2}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}),$$

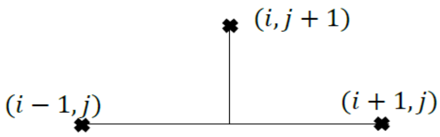
en posant $r = \frac{ka^2}{h^2}$, la formule précédente devient:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \tag{2.15}$$

Ce schéma est stable pour $r \leq 0.5$ et instable pour $r > 0.5$ dont les erreurs s'amplifier rapidement. Pour $r = 0.5$, alors :

$$u_{i,j+1} = 0.5(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \tag{2.16}$$

La maille du calcul est donc:



b) Schéma implicite

Dans ce schéma, on approche la dérivée u''_{xx} au temps $(t = (j+1)k)$ au lieu du point $t = jk$ et pour obtenir la solution, il faut résoudre un système d'équations linéaires.

$$u_{i,j} = -ru_{i-1,j+1} + (1+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} \text{ avec } r = \frac{a^2k}{h^2}. \tag{2.17}$$

Ce schéma est inconditionnellement stable c'est à dire il est stable quel que soit r.

2.7 Equations hyperbolique

La **plus simple équation** de **type hyperbolique** est **l'équation d'onde**, sa forme générale est : $u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$ avec c est la vitesse de propagation.

Ces équations dépendent souvent du temps c'est pourquoi on les appelle souvent équations d'évolution ou équations dynamiques.

Pour obtenir la solution $u(x,t)$ de ce type d'équation, il faut avoir des conditions supplémentaires :

a) des conditions aux limites : $u(0,t)$ et $u(L,t)$, L est la dimension du problème.

b) des conditions initiales ou l'état de la solution à l'instant $t = 0$:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u'(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{2.18}$$

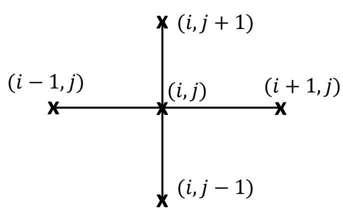
Utilisant le schéma centré pour remplacer les dérivées de l'équation d'onde :

$u''_{tt} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$ et $u''_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$, remplacer ces quantités discrètes dans 1'équation d'onde, on obtient le schéma explicite:

$$u_{i,j+1} = r^2 u_{i-1,j} + 2(1-r^2)u_{i,j} + r^2\left(u_{i+1,j} - u_{i,j-1}\right) \tag{2.19}$$

avec $r = \dfrac{ck}{h}$

La maille du calcul est :



Cet algorithme est stable pour $r \leq 1$. Pour $r = 1$, l'algorithme devient donc :

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \tag{2.20}$$

Pour lancer l'algorithme, les valeurs $(u_{0,0} + u_{1,0}, \dots, u_{N,0})$ sont calculées à partir de la condition initiale $u(x,0)$ et les valeurs $(u_{0,1} et\, u_{N,1})$ sont calculées par $u(0,t)$ et $u(L,t)$. Dans la première itération 1'algorithme fait appel à des points appelés points fictifs $(u_{i,-1}$ pour $j = 0)$. Ces points sont trouvés en utilisant la condition initiale de vitesse $u_t'(x,0) = g(x)$.

Exercices corrigés Chapitre 2

Exercice 1 :

Soit le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Dans le carré [0 ≤ x ≤ 2 et 0 ≤ y ≤ 3], vérifiant les conditions suivantes :

$u(0,y) = 2y, u(0.2,y) = y + 0.2, u(x,0) = x$ et $u(x,0.3) = 0.6 - 0.5x$.

1- Donner le type du problème, et séparer ses conditions.
2- Résoudre le problème par la **méthode des différences finies (MDF)** en prenant $\Delta x = h = \Delta y = k = 0.1$.

Exercice 2

On étude la température de l'intérieur d'un système électronique où on maintient ses limites à température $0°c$ avec:

$$\begin{cases} u_t' = u_{xx}'' & \text{pour } 0 \le x \le 1 \\ u(x,0) = 2x & \text{pour } 0 \le x \le 0.5 \\ u(x,0) = 2(1-x) & \text{pour } 0.5 < x \le 1 \end{cases}$$

- Résoudre le problème avec la méthode MDF en utilisant le schéma explicite avec $r = 0.1, \Delta x = h = 0.25$ et $0 \le t \le 0.0125$.

Exercice 3

Soit l'équation d'onde : $u_{tt}'' = 16u_{xx}''$, avec les conditions suivantes:

$$\begin{cases} u(1,t) = t + 1, t \ge 0 \\ u(2.6,t) = 1.8 + t, t \ge 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u(x,0) = 0.5 + \dfrac{x}{2} \\ u_t'(x,0) = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

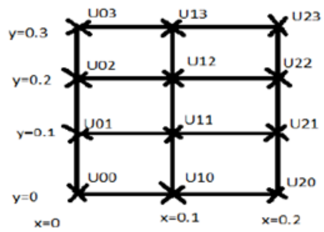
1- Séparer les conditions du problème précédent.
2- Trouver la solution pour $r = 1, \Delta x = 0.4$ et $0 \le t \le 0.1$ S.

Solutions des Exercices Chapitre 2

Solution l'exercice 1

1) L'équation est de type elliptique et le problème de type de Dirichlet. Dans ce problème on a seulement des conditions aux limites.

2) Pour résoudre ce problème, on doit suivre les étapes ci-après :
2.1) Tracer le problème : on a $\Delta x = h = \Delta y = 0.1$et $[0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 3]$.



2.2) déterminer les connues et les inconnues par les conditions aux limites.

- à l'aide de $U(0, y) = 2y$: $U_{00} = 0$, $U_{01} = 0.2$, $U_{02} = 0.4$ et $U_{03} = 0.6$.
- à l'aide de $U(0.2, y) = y + 0.2$: $U_{20} = 0.2$, $U_{21} = 0.3$, $U_{22} = 0.4$ et $U_{23} = 0.5$.
- à l'aide de $U(x, 0) = x$: $U_{00} = 0$, $U_{10} = 0.1$, $U_{20} = 0.2$.
- à l'aide de $U(x, 0.3) = 0.6 - 0.5x$: $U_{03} = 0.6$, $U_{13} = 0.55$, $U_{23} = 0.5$.

En remarque que le problème est bien posé.
2.3) détermination des inconnues : les inconnues sont U_{11}etU_{12}.
2.3) Ecriture de l'algorithme
On remplace les formes discrètes dans la fonction continue, c'est-à-dire, on remplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2}$$

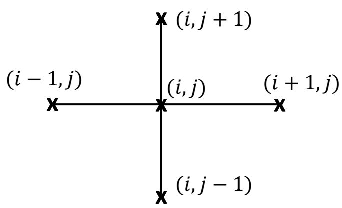
On obtient

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} = 0 \text{ et} h = k,$$

Donc l'approximation de problème (1) est :

$$4U_{i,j} = U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}$$

La valeur de la fonction au point (i, j) est obtenue en faisant la moyenne arithmétique des valeurs aux points $(i+1, j), (i-1, j), (i, j+1)$ et $(i, j-1)$. Dont voici la maille du calcul est :



2.4) Calculer les inconnues U_{11} et U_{12}: l'intérieur du domaine, on a :

$$\begin{cases} 4U_{11} = U_{21} + U_{01} + U_{12} + U_{10} = 0.3 + 0.2 + U_{12} + 0.1 \\ 4U_{12} = U_{02} + U_{22} + U_{11} + U_{13} = 0.4 + 0.4 + U_{11} + 0.55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4U_{11} - U_{12} = 0.6 \\ 4U_{12} - U_{11} = 1.35 \end{cases}$$

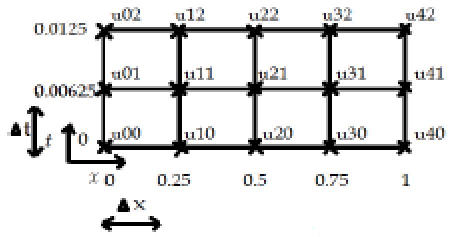
Sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.35 \end{bmatrix}$$

A l''aide de la méthode de Crammer, on trouve ($U_{11} = 0.25$ et $U_{12} = 0.4$)

Solution l'exercice 2

1 Tracer le problème : on a $r = 0.1, \Delta x = h = 0.25$ et $0 \leq t \leq 0.0125$. On détermine k pour limiter l'axe temporel.



2 determiner les connues du problème.

- a l'aide de $u(x,0) = 2x$ pour $0 \leq x \leq 0.5$: $u_{00} = 2 \times 0 = 0, u_{10} = 2 \times 0.25 = 0.5, u_{20} = 2 \times 0.5 = 1$.
  $-$dl' aide de $u(x,0) = 2(1-x)$ pour $0.5 < x \leq 1$: $u_{30} = 2 \times (1 - 0.75) = 0.5, u_{40} = 2 \times (1-1) = 0$.
- a l'aide de la condition (on maintient ses limites a 0°c) c $-$ d $-$ d$u(0,t) = u(1,t) = 0$ pour $0 \leq t \leq 0.0125$: $u_{00} = u_{01} = u_{02} = u_{40} = u_{41} = u_{42} = 0$.
  Le probleme est bien posé.

3 determination des inconnues : les inconnues sont $u_{11}, u_{21}, u_{31}; u_{12}, u_{22}, u_{32}$.

4 Ecriture de 1'alzorithme :
L'alzorithme est:

$$u_{lj+1} = u_{lj} + r\left(u_{l+1,j} - 2u_{l,j} + u_{l-1,j}\right)$$

Pour $r = 0.1$, 1$'$ algorithme devient : $u_{lj+1} = u_{lj} + 0.1 \times \left(u_{l+1f} - 2u_{lj} + u_{l-1j}\right)$, et la maille du calcul est :

4) Calculer les inconnues $(u_{11}, u_{21}, u_{31}; u_{12}, u_{22}, u_{32})$:

4.1) Première itération : $j = 0, i = 1,2,3$.

- pour $i = 1$

$$u_{11} = u_{10} + 0.1(u_{20} - 2u_{10} + u_{00}) = 0.5 + 0.1(1 - 2 \times 0.5 + 0) = 0.5$$
$$u_{11} = 0.5$$

- pour $i = 2$

$$u_{21} = u_{20} + 0.1(u_{30} - 2u_{20} + u_{10}) = 1 + 0.1(0.5 - 2 \times 1 + 0.5) = 0.9$$
$$u_{21} = 0.9$$

- pour $i = 3$

$$u_{31} = u_{30} + 0.1(u_{40} - 2u_{30} + u_{20}) = 0.5 + 0.1(0 - 2 \times 0.5 + 1) = 0.5$$

4.1) Deuxième itération : $j = 1, i = 1,2,3.$

- pour $i = 1$

$$u_{12} = u_{11} + 0.1(u_{21} - 2u_{11} + u_{01}) \quad = 0.5 + 0.1(0.9 - 2 \times 0.5 + 0) = 0.49$$
$$u_{32} \quad = 0.49$$

- pour $i = 2$

$$u_{22} = u_{21} + 0.1(u_{31} - 2u_{21} + u_{11}) \quad = 0.9 + 0.1(0.5 - 2 \times 0.9 + 0.5) = 0.82$$
$$u_{22} \quad = 0.82$$

- pour $i = 3$

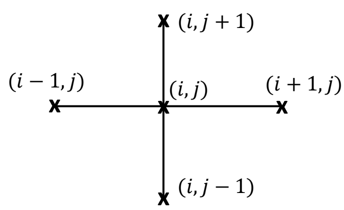
$$u_{32} = u_{31} + 0.1(u_{41} - 2u_{31} + u_{21}) \quad = 0.5 + 0.1(0 - 2 \times 0.5 + 0.9) = 0.49$$
$$u_{32} \quad = 0.49$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u'(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Utilisant le schéma centré pour remplacer les dérivées de 1'équation d'onde : $u''_{tt} = \frac{u_{(j+1}-2u_{l_j}+u_{l,j-1}}{k^2}$ et $u^n_{xx} = \frac{u_{4+1,j}-2u_{l,j}+u_{-14j}}{h^2}$, remplacer ces quantites discrètes dans 1^+équation d'onde, on obtient le schema explicite :

$$u_{i,j+1} = r^2 u_{[-1,j} + 2(1 - r^2)u_{L,j} + r^2\left(u_{i+1,j} - u_{[,j-1}\right) \text{ avec } r = \frac{ck}{h}$$

La maille du calcul est:



Cet algorithme est stable pour $r \leq 1$. Pour $r = 1$, l'algorithme devient donc:

$$u_{1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1}$$

Pour lancer l'algorithme, les valeurs $(u_{0,0} + u_{1,0}, \dots, u_{N,0})$ sont calculées a partir de la condition initiale $u(x, 0)$ et, les valeurs $(u_{0,1}\text{et}\, u_{N,1})$ sont calculées par $u(0, t)$ et $u(L, t)$. Dans la première itération l'algorithme fait appel d des points appelés points fictifs $(u_{i,-1}$ pour $j = 0)$. Ces points sont trouvés en utilisant la condition initiale de vitesse $u_t'(x, 0) = g(x)$.

Solution l'exercice 3

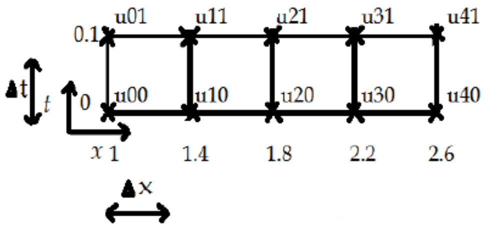
Séparation des conditions:

- Les conditions initiales sont: $\begin{cases} u(x, 0) = 0.5 + \frac{x}{2} \\ u_t'(x, 0) = \frac{x}{2} \end{cases}$.
- Les conditions aux limites sont : $\begin{cases} u(1, t) = t + 1 \\ u(2.6, t) = 1.8 + t \end{cases}$

2 La solution pour $r = 1, \Delta x = 0.4$ et $0 \leq t \leq 0.1S$.
2.1) Tracer le problème : on a $c = 4, r = 1$. On détermine $k = \Delta t$ pour limiter l'axe temporel.

$$r = c\frac{k}{h} \to k = \frac{rh}{c} \text{ avec } c = 4 \text{ dan ce cas.}$$

$k = \Delta t = \frac{1 \times 0.4}{4} = 0.1$ (0.1/0.1 c'est-à-dire on a seulement une seule itération)



2.2) déterminer les connues du problème.

− a l'aide de $u(1, t) = t + 1: u_{00} = 0 + 1 = 1, u_{01} = 0.1 \times 1 = 1.1$.
− a l'aide de $u(2.6, t) = 1.8 + t: u_{40} = 1.8, u_{41} = 1.8$.
− a l'aide de $u(x, 0) = 0.5 + \frac{x}{2}: u_{00} = 1, u_{10} = 1.2, u_{20} = 1.4, u_{30} = 1.6, u_{40} = 1.8$.
Le problème est bien posé.

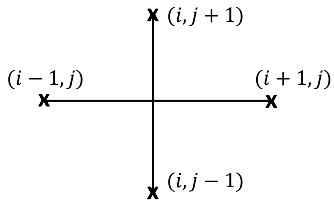
2.3) détermination des inconnues : les inconnues sont u_{11}, u_{21} et u_{31}.
2.4) Ecriture de 1'algorithme :
L'algorithme est :

$$u_{i,j+1} = r^2 u_{l-1,j} + 2(1 - r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} - u_{l,j-1}) \text{ avec } r = \frac{ck}{h}$$

Pour $r = 1$

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1}$$

La maille du calcul est:



2.6) Calculer les inconnues (u_{11}, u_{21} et u_{31}) :

- Première itération : $j = 0, i = 1,2,3$.

− **Pour $i = 1$**

$$u_{11} = u_{00} + u_{20} - u_{1-1}$$

u_{1-1} est point fictif (hors domaine du calcul), on va utiliser la condition $u_t^{'}(x, 0) = \frac{x}{2'}$ pour l'eliminer.

$$u_t^{'} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = \frac{x_i}{2}$$

donc: $u_{i,j-1} = u_{i,j+1} - 2k\frac{x_i}{2} \rightarrow u_{i,j-1} = u_{i,j+1} - kx_i$

$u_{1,-1} = u_{1,1} - kx_1$, on remplace dans u_{11}

$u_{11} = u_{00} + u_{20} - (u_{1,1} - kx_1)$, donc : $u_{11} = 0.5(u_{00} + u_{20} + kx_1)$ avec $k - 0.1$ et $x_1 = 1.4$.

$$u_{11} = 0.5(1 + 1.4 + 0.1 \times 1.4)$$

$$\boldsymbol{u_{11} = 1.27}.$$

− **Pour $i = 2$**

$$u_{21} = u_{10} + u_{30} - u_{2-1}$$

u_{2-1} est point fictif. $u_{2,-1} = u_{2,1} - kx_2$, on remplace dans u_{21}

$u_{21} = 0.5(u_{10} + u_{30} + kx_2)$ avec $k - 0.1$ et $x_1 = 1.8$.

$$u_{21} = 0.5(1.2 + 1.6 + 0.1 \times 1.8)$$

$$\boldsymbol{u_{21} = 1.49}.$$

− **Pour $i = 3$**

u_{3-1} est point fictif. $u_{3,-1} = u_{3,1} - kx_3$, on remplace dans u_{31}

$u_{31} = 0.5(u_{20} + u_{40} + k3)$ avec $k = 0.1$ et $x_1 = 2.2$.

$$u_{31} = 0.5(1.4 + 1.8 + 0.1 \times 2.2)$$

$$\boldsymbol{u_{31} = 1.71}.$$