LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

0.1 Équations Différentielles du 1-ère ordre

Définition 0.1.1 *Une équation de la forme*

$$y' = F(x, y, y') = 0;$$

où y qui est une fonction de x est l'inconnu, s'appelle équation différentielle du première ordre.

0.1.1 Quelques types des E.D du 1-er ordre

0.1.1.1 E.D à variable séparables :

Elles sont de la forme

$$f(y)y' = g(x).$$

La solution générale est donnée par

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx, \quad \text{car } y' = \frac{dy}{dx}.$$

Exemple 0.1.2 *On considère l'équation différentielle*

$$y' - 4y = 0 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 4dx \Leftrightarrow y = C.e^{4x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exercice 1 : Intégrer les deux équations suivantes :

$$(y^2+1)y' = x + 1. \qquad (x-1)y' + \sqrt{1-y^2} = 0.$$

0.1.1.2 E.D à variable séparables :

Elles sont de la forme

$$y' = F(\frac{y}{x}).$$

La résolution se ramenant à la résolution d'une équation différentielle à variable séparable.
On pose $\frac{y}{x} = t \Leftrightarrow y = tx$, alors $y' = xt' + t$ ou bien $\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t$.
La solution générale est donné par

$$x = C.e^{\int \frac{dt}{F(t)-t}}$$

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

Exemple 0.1.3

$$xy' - 3y = x \Leftrightarrow y' = 3(\frac{y}{x}) + 1, \quad donc\, x = C.e^{\int \frac{dt}{2t+1}} = C\sqrt{2(\frac{y}{x}) + 1}$$

Exercice 2 : Intégrer l'équation homogène suivante :

$$x^2 y dx - y^3 dy = x^3 dy$$

0.1.1.3 E.D Linéaires :

Elles sont de la forme

$$y' + f(x)y + = g(x).......(1)$$

Où f, g sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $g(x)$ est appelé le second membre de l'équation.

1. **Résolution sans second membre :**

$$y' + f(x)y = 0,$$

c'est une équation à variable séparable. La solution générale est donnée par

$$y_H = Ce^{-\int f(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

2. **Résolution avec second membre :** La solution générale de l'équation complète (1)

$$y_G = y_H + y_P,$$

où y_G : Solution générale de (1), y_H : Solution générale sans second membre, y_P : Solution particulière de (1)
Question : Comment trouver y_P?
— Par constatation à l'œil nu. Sinon
— Par la méthode de variation de constantes
On pose $y_P(x) = C(x).y_1(x)$, où $y_1(x) = e^{-\int f(x)dx}$. Donc

$$y_p'(x) = C'(x)e^{-\int f(x)dx} - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx}.$$

En suite on substitue dans (1), on trouve

$$C'(x) = g(x)e^{\int f(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int g(x)e^{\int f(x)dx}, \quad \text{alors } y_P(x) = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx.e^{-\int f(x)dx}$$

Exemple 0.1.4 *On résoudre l'équation $xy' - 2y = x$.*

— *Par constatation, ($-x$ solution particulière) Résolution sans second membre :*

$$xy' - 2y = 0 \Rightarrow y = C.x^2. \quad donc\, y_G = C.x^2 - x.$$

— *Par la méthode de la variation de constante :*

$$y' = C'.x^2 + 2x.C \quad alors\, C' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow C = -\frac{1}{x} + K.$$

Donc

La solution générale de l'équation complète $y = Kx^2 - x$.

Exercice : Résoudre l'équation linéaire $(1 - x^2)y' - xy = x$.

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

0.1.1.4 E.D de Bernoulli :

Elles sont de la forme

$$y' + f(x)y + = y^{\alpha} g(x)$$

- $y = 0$, c'est une solution particulière.
- $\alpha = 0$, équation différentielle complète.
- $\alpha = 1$, équation linéaire sans second membre.
- $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1,\ y \neq 0$, équation de Bernoulli.

La résolution de cette équation. En multipliant par $y^{-\alpha}$, on trouve

$$y^{-\alpha} y' + y^{1-\alpha} f(x) + = g(x).$$

On pose $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y'$. D'où

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x) z = g(x).$$

On est dans le cas d'une équation linéaire.

Exemple 0.1.5

$$xy' - y = y^2 \ln x.$$

E.D de Bernoulli , $\alpha = 2$. On multiplier par y^{-2}

$$xy^{-2}y' - y^{-1} = \ln x. \quad \textit{on pose } z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^2 y',$$

on trouve

$$z' + \frac{1}{x} z = \frac{\ln x}{x}. \quad \textit{E.D linéaire complète}$$

0.2 Équations Différentielles de second ordre

Définition 0.2.1 *On appelle équation différentielle de second ordre toute relation sous la forme*

$$(x, y, y', y'') = 0,$$

entre la variable x, la fonction $y(x)$ et ses deux dérivées premières.

Exemple 0.2.2
- *$y'' + \omega^2 y = 0$, admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions $\varphi_1(x) = \sin \omega x,\ \varphi_2(x) = \cos \omega x$*
- *$y'' = 0$, admet pour solutions tout polynôme de la forme $ax + b$, avec a; et b deux constantes arbitraires.*

0.2.1 Équations ne contenant pas de y

Soit

$$F(x, y', y'') = 0.$$

On pose $y' = z$, l'équation devient alors

$$F(x, z, z') = 0.$$

Exemple 0.2.3

$$y'' + y'^2 = 0, \quad \textit{on pose } y' = z, \textit{ alors } z' + z^2 = 0 \Rightarrow -\frac{dz}{z^2} = dx \Rightarrow z = \frac{1}{x+c} \Rightarrow dy = \frac{dx}{x+C}$$

$$y = \ln(x + C) + K, \quad C,\ K \textit{ étant des constantes}$$

Exercice : Résoudre l'équation $xy'' + 2y' = 0$.

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

0.2.2 Équations différentielles linéaires de second ordre

Définition 0.2.4 *On appelle équation linéaire de second ordre une équation de la forme*

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x),$$

où $a(x),\ b(x),\ c(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions.

On associe à cette équation l'équation sans second membre appelée **équation homogène**, c'est-à-dire $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$, avec second membre appelée **équation complète.**

Théorème 0.2.5 *La solution générale s'obtient en ajoutant à une solution particulière de l'équation complète la solution général de l'équation homogène (i.e sans second membre) $y_G = y_P + y_H$.*

0.2.2.1 Résolution de l'équation sans second membre

Si on connaît $y_1,\ y_2$ comme des solutions particulières, alors la solution générale s'écrit $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ et les deux solutions doivent être linéairement indépendantes, ce qui se traduit par

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0. \quad \text{Est appelé le Wronskien}$$

0.2.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constantes

Elles sont de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

où $a,\ b,\ c,$ sont des constantes réelles et $f(x)$ est une fonction. Pour résoudre ce type d'équations

1. On cherche la solution générale de l'équation homogène c'est-à-dire $f(x) = 0$. Sous la forme $y = e^{rx}$ et on remplace dans $ay'' + by' + cy = 0$, on obtient

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0 \Rightarrow ar^2 + br + c = 0, \quad \text{appelée l'équation caractéristique}$$

— Si $\Delta > 0$, donc $r_1,\ r_2$ deux racines réelles distinctes. La solution générale de l'équation homogène est sous la forme

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad C_1,\ C_2 \text{sont des constantes réelles.}$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double $r_1 = r_2 = r$. La solution générale est de la forme

$$y = (C_1 x + C_2)e^{rx}.$$

— Si $\Delta < 0$, donc $r_1,\ r_2$ deux racines complexes $r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta$. La solution générale est de la forme

$$y = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$$

2. On cherche la solution générale de l'équation complète c'est-à-dire $f(x) \neq 0$.
   — Cas où $f(x)$. est un polynôme alors on cherche la solution particulière sous forme d'un polynôme.

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

— Cas où $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, on cherche la solution particulière, on pose $y = e^{\alpha x}P(x)$, (P polynôme quelconque)

— Cas où $f(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x), \quad \alpha,\ A,\ B \in \mathbb{R}$.

• Si $i\alpha$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique, on cherche y_P sous la forme $y_P = A'\cos(\alpha x) + B'\sin(\alpha x)$

• Si $i\alpha$ est une racine de l'équation caractéristique (nécessairement simple), on cherche y_P sous la forme $y_P = x(A'\cos(\alpha x) + B'\sin(\alpha x))$

— **Dans le cas générale** , pour résoudre l'équation complète, on applique la méthode de variation des constantes. Comme suit :

• Soit $y = C_1y_1 + C_2y_2$ solution générale de l'équation sans second membre. Recherche d'une solution particulière par la méthode de variation des constantes. On pose $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ avec $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$. Après calcul, on aura deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \\ C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \end{cases}$$

Ce système a une et une seule solution car $y_1,\ y_2$ sont linéairement indépendants. donc $C_1(x),\ C_2(x)$.

Exemple 0.2.6 *Résoudre l'équation* $y'' + y = x\sin x$.

1. Résoudre l'équation sans second memebre :
L'équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$, alors
$$y_H = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

2. Avec second memebre :
En utilisant la méthode de la variation de constante
$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = x\sin x \end{cases}$$
$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0 \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = x\sin x \end{cases}$$
$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1.$$
Donc $C_1' = -x\sin^2 x, \quad C_2' = x\cos x\sin x$
Après intégration on trouve :
$C_1 = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{8}\cos 2x, \quad C_2 = \dfrac{x}{2}\cos 2x - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{8}\sin 2x$

On remplace $C_1,\ C_2$ dans y_H On obtient la solution générale y_G.

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF M'SILA
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de l'Informatique
Année universitaire : 2022/2023

1-ère année Informatique - Semestre 2
Module Analyse 02- Série :03

Exercice 01 : Donner le type des équations différentielles suivantes (sans les résoudre)

1. $xy' = (x-1)y, \qquad (1+y^2) = x, \qquad 2xyy' - y^2 + x = 0.$
2. $y' = \dfrac{x-y}{x+y}, \qquad y' - \dfrac{y}{1-x^2} = 1 + x.$

Exercice 02 : Résoudre les équations suivantes :

- $(1+e^x)yy' = e^x, \qquad \circ \quad \tan(x)\sin^2(y)dx + \cos^2(x)\cot(y)dy.$
- $\dfrac{e^y}{e^y+1}y' = \dfrac{1}{x}, \qquad \circ \quad 3e^x\tan(y)dx + \dfrac{1-e^x}{\cos^2 y}dy.$
- $y'\tan(x) = y, \qquad \circ \quad (x^2+1)y' = y^2 + 4.$

Exercice 03 : Résoudre les équations homogènes suivantes :

- $y' = \dfrac{y}{x} - 1, \qquad \circ \quad y' = -\dfrac{x+y}{x} \qquad \circ \quad (x-y)ydx - x^2dy = 0.$
- $(x^2+y^2)dx - 2xydy = 0, \qquad \circ \quad y' = \dfrac{x-y}{x+y}$

Exercice 04 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y' - \dfrac{y}{x} = x, \qquad \circ \quad (1-x^2)y' + xy = 2x.$
- $y' - y\cos(x) = \sin(2x).$

Exercice 05 : Trouver les solutions particulières vérifiant les conditions données :

1. $xy' + y - e^x = 0; \quad y(a) = b;$
2. $y' - \dfrac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, \quad y(0) = 0.$
3. $y' - y\tan(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}, \quad y(0) = 0.$

Exercice 06 : Trouver la solution générale des équations suivantes :

- $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2, \qquad \circ \quad y'\sin x\cos x - 3y = -3y^{\frac{2}{3}}\sin^3 x, \qquad \circ \quad y' - y = 2\sqrt{y}e^{-x}.$

Exercice 07 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 8x + 7.$
2. $y'' - y = e^{2x} - e^x$
3. $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x} - e^x.$
4. $y'' + y = x\sin x$
5. $y'' + 2y' + y = \cos^2 x.$
6. $y'' - 2y' + 2y = \sin(x).e^x$

---

0. ***Responsable de module : M. TOUAHRIA***