Extremums

L2 Maths **Module: Analyse 4**

Série d'exercices n°4

Licence mathématiques-L2 2023

Remarque 1 ★★★

l'exercice noté par ($\star$) ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de **TD**

Exercice 1 ★★★

On considère l'application f définie par

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^3-3y. \end{array}$$

1. Justifier que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et préciser son gradient, en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de l'application f.
3. Étudier les extrema éventuels de f, en précisant leurs natures (minimum local, minimum global, maximum local, maximum global, ou aucun extremum local donc aucun extremum global).

Exercice 2 ★★★

Soit la fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=x^2+2xy+y-y^3$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Donner leur nature (extremum local, point selle ...).
3. Montrer que le minimum local obtenu n'est pas un minimum global pour f.

Exercice 3 ★★★

Soit la fonctions $f:(x,y)\longmapsto x\ln^2 x+y^2$

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. (a) Trouver les points critiques de f.
   (b) Déterminer leur nature.
3. (a) Montrer que le minimum local obtenu est en fait un minimum global.
   (b) f admet-elle un maximum global?

Exercice 4 ★★★

Déterminer les points stationnaires et leurs natures dans les cas suivants

1. $f(x,y)=4x^2+2xy+y^2$.
2. $f(x,y)=-x^2+x-xy+y-y^2$.

3. $f(x,y,z) = x^2 + 2x + y^2 - 3y + 2z^2$. $(\star)$

Exercice 5 ☆☆☆

Étudier les extrema de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$ dans les cas suivants:

1. $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y - 3$ et $g(x,y) = x + y - 4 = 0$
2. $f(x,y) = 10\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[3]{y}$ et $g(x,y) = \dfrac{1}{4}\ln x + \dfrac{1}{3}\ln y - 3$. $(\star)$.

Exercice 6 ☆☆☆

Soit la fonctions

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x + y + z. \end{array}$$

On cherche le maximum de la fonction f sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

1. Expliquer pourquoi ce maximum existe.
2. Ecrire le Lagrangien associé au problème.
3. Déterminer alors le point où le maximum est atteint et la valeur de ce maximum.

Exercice supplémentaire 1 ☆☆☆

Soit l'équation:

$$x^5 + xyz + y^3 + 3xz^4 = 2 \tag{1}$$

1. Montrer que l'équation (1) définit au voisinage du point $(1,-1)$ une fonction implicite $z = g(x,y)$, telle que $g(1,-1) = 1$.
2. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = g(x,y)$ en point $(1,-1)$.

Exercice supplémentaire 2 ☆☆☆

Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}, \end{array}$$

où les variables x et y sont liées par la contrainte $g(x,y) = x^2 + y = 1$.

1. Déterminer les points critiques du Lagrangien $L(x,y,\lambda)$ associé au problème.
2. En utilisant l'équation de la contrainte, exprimer f en fonction de la variable x seulement.
3. Étudier la fonction obtenue et en déduire les natures des points critiques.
4. La fonction f admet-elle un maximum global sous la contrainte ?