Université de M'sila		Faculté des Mathématiques et d'Informatique
L 2 Mathématiques	**Correction de Série: N** 04 **Extremums**	Module: Analyse 4

Remarque 1

l'exercice noté par ($\star$) ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de **TD**

Correction d' exercice 1 ☆

On considère l'application f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2+y^3-3y. \end{array}$$

1 L'application f est polynomiale en les variables x et y donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (et même de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$).
On calcule, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \text{et,} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3.$$

Donc son gradient en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est

$$\nabla f = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \ \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \left(\ 2x, \ \ 3y^2 - 3 \ \right)$$

2 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow 2x = 0, \text{ et } 3y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 0, \text{ et } (y = -1 \vee y = 1)$$

Donc la fonction f possède deux poins critiques: $(0,-1)$ et $(0,1)$.

3 On sait que f atteint un extremum local en un point, alors ce point est un point critique de f, d'après la condition nécessaire d'existence d'un extremum. Il y a donc deux points à étudier.

(a) Étude du point critique $(0,1)$ de f.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x,1+y) - f(0,1) &= x^2 + y(1+y)^3 - 3(1+y) - (-2) \\ &= x^2 + y^2(3+y). \end{aligned}$$

Donc pour tout (x,y) appartenant à

$$\mathcal{U} := \mathbb{R} \times]-3,3[,$$

qui est voisinage ouvert de $(0,0)$, et $f(x,1+y) \geq f(0,1)$. La fonction f atteint donc un minimum local (valant -2) au point $(0,1)$.
Ce minimum local n'est pas global car

$$f(0,y) = y^3 - y, \text{et } \lim_{y\to-\infty} f(0,y) = \lim_{y\to-\infty} y^3 = -\infty.$$

(b) Étude du point critique $(0,-1)$ de f.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x,-1+y) - f(0,-1) &= x^2 + y(y-1)^3 - 3(y-1) - (-2) \\ &= x^2 - 3y^2 + y^3 = x^2 + y^2(y-3). \end{aligned}$$

D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(y=0)$

$$f(x,-1) - f(0,-1) = x^2 \geq 0.$$

D'autre part si $(x=0)$

$$f(0,-1+y) = -3y^2 + y^3 \underset{y\to 0}{\sim} -3y^2 < 0.$$

Donc la quantité $f(x,-1+y) - f(0,-1)$ n'a de signe constant dans aucun voisinage de $(0,0)$. Ainsi la fonction f n'atteint pas un extremum local (et a fortiori pas un extremum global) au point $(0,-1)$.

Correction d' exercice 2 ☆

On a f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y - y^3.$$

1 f est de classe C^2 (et même de classe C^∞) peut donc appliquer la méthode des dérivées premières et secondes pour l'étude des extrema locaux. On a, donc

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\ 2(x+y), \ \ 2x + 1 - 3y^2 \ \right)$$

On résoudre le système d'équations Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow x+y=0, \text{ et } -3y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x, \text{ et } (y=-1 \vee y = \frac{1}{3})$$

Donc la fonction f admet deux poins critiques: $A(1,-1)$ et $B(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. On étudie la nature du points critiques avec la Hessienne, et comme,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y \end{cases}$$

Alors, on trouve:

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2 \end{pmatrix}$$

Donc, le déterminant de la matrice Hessienne au point critique $A(1,-1)$ est

$$\det\Big(Hess_f(1,-1)\Big) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0, \text{ avec, } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 2 > 0$$

Alors, A correspond à un minimum local pour f.
Au point $B(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ on a

$$\det\left(Hess_f(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\right) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

donc B correspond à un point selle (ni minimum local ni maximum local).

2 La valeur de f au point A est $f(1,1) = 1$, or on a par exemple $f(0,2) = 6 < f(1,1)$, donc A n'est pas un minimum global.

Remarque 2 ☆

On note que, sans même chercher les minima locaux, il était clair dès le début que f ne pouvait admettre de minimum global sur $\mathbb{R}^2$ puisque

$$\lim_{y \to +\infty} f(0,y) = \lim_{y \to +\infty} (y - y^3) = \lim_{y \to +\infty} (-y^3) = -\infty.$$

L'absence de minimum global de f est résultat de ne compacité de $\mathbb{R}^2$ malgré la continuité de f.

Correction d' exercice 3 ☆

On a $f : (x,y) \longmapsto \left(x(ln^2 x) + y^2\right)$.

1 $\mathcal{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2 (a) f est de classe C^∞ sur son domaine et admet pour dérivées partielles

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = \left(\ ln^2 x + 2\ln x + y^2, \ \ 2xy \ \right)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\ 0, \ \ 0 \ \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} y = 0, \ (x > 0) \\ ln^2 x + 2\ln x + y^2 = 0 \end{array} \right)$$

Par conséquent $ln^2 x + 2\ln x + y^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \ \vee \ x = e^{-2}$. On a donc deux points critiques: $A(1,0)$ et $B(e^{-2}, 0)$.

(b) On les notations de Monge, donc calculons la déterminant de la Hessienne. Alors, on aura:

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1 + \ln x}{x}\right) & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Donc, le déterminant de la matrice Hessienne au point critique $A(1,0)$ est

$$\det\left(Hess_f(1,0)\right) = pr - q^2 = 4, \text{ et } p = 2 > 0,$$

où $p = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)$ et $q = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0)$. Alors, A est un minimum local pour f.
Le déterminant de la matrice Hessienne au point critique $B(e^{-2}, 0)$ est

$$\det\left(Hess_f(e^{-2}, 0)\right) = pr - q^2 = -4.$$

Donc B est un point col pour f.

3 (a) On a $f(1,0)=0$, or f est toujours positive, car,

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f : \ f(x,y) \geq 0.$$

On en déduit que A est le minimum global de f.

(b) On remarque que $\mathcal{D}_f$ est ouvert et comme f n'admet pas un maximum local. Alors, f n'admet pas de maximum global. On peut aussi voir que f n'est pas majorée, car:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x ln^2 x = +\infty.$$

Correction d' exercice 4 ☆

On étudie la nature des points stationnaires pour chacune des fonctions suivantes

1 $f(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2$. f est de classe C^∞ sur son domaine. Donc, on a

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = \left(\ 8x+2y, \ \ 2x+2y \ \right)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\ 0, \ \ 0 \ \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x=0 \\ y=0 \end{pmatrix}$$

Alors, seul le point $A(0,0)$ peut être un extremum pour f, et la nature de ce extremum dépend le signe de $\Delta(Hess_f)$ en $A(0,0)$. en effet

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme,

$$\det\Big(Hess_f(0,0)\Big) = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0, \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0.$$

est minimum local en $(0,0)$ et ce minimum est $f(0,0) = 0$.

2 $f(x,y) = -x^2 + x - xy + y - y^2$. On a $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Donc, Les conditions d'extremum nécéssaires sont réalisees aux points solutions du système suivant

$$\nabla f(x,y) = \left(\ 0, \ \ 0 \ \right) \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = \left(\ 0, \ \ 0 \ \right)$$

$$\begin{cases} -2x+1-y=0 \\ -x+1-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Donc, le point $A(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ peut être un extremum pour f. Maintenant, on étude la nature de ce extremum. Alors, on voit que

$$Hess_f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comme, on a

$$\det\Big(Hess_f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})\Big) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = -2 < 0.$$

Alors, $f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ est un maximum local de f en point $(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

3 $f(x,y,z) = x^2 + 2x + y^2 - 3y + 2z^2$. On remarque que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$. Donc, on a

$$\nabla f(x,y,z) = (\ 0,\ \ 0,\ \ 0\ ) \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\ \ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right) = (\ 0,\ \ 0,\ \ 0\ )$$

D'où,

$$\begin{cases} 2x+2=0 \\ 2y-3=0 \\ 2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=0 \end{cases}$$

Le point tationnaire est $A(-1, \frac{3}{2}, 0)$. Donc, la nature de ce extremum selon le signe de $\Delta(Hessf)$.

$$Hess_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Par coséquent,

$$\det\left(Hess_f(-1, \frac{3}{2}, 0)\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0.$$

Alors, $f(-1, \frac{3}{2}, 0) = -\frac{13}{4}$ est un minimum pour la fonction f;

Correction d' exercice 5 ☆

On étudie les extrema de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$. telles que

1 $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y - 3$ et $g(x,y) = x + y - 4 = 0$.
La contrainte permet d'exprimer implicitement y en fonction de x. Donc, on trouve

$$y = 4 - x.$$

On étudie alors les variations de la fonction F définie par

$$F(x) = f(x, y(x)) = 2x^2 + 2x(4-x) + (4-x)^2 - 6x - 2(4-x) - 3 = x^2 - 4x + 5.$$

F est une fonction polynôme du second degré, comme de coefficient dominant $a = 1 > 0$ et $\Delta = 0$. Alors, F atteint son minium en $x = -\frac{b}{2a} = 2$.
Conclusion: f admet un minimum relatif sous la contrainte $x + y - 4 = 0$ en $(2,2)$. Ce minimum est égal à $f(2,2) = 1$.

2 $f(x,y) = 10\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[3]{y}$ et $g(x,y) = \frac{1}{4}\ln x + \frac{1}{3}\ln y - 3$. Reste comme exercice.

Correction d' exercice 6 ☆

On cherche le maximum de la fonction $f(x,y,z) = x + y + z$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1 La surface

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+ : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Clairement $\mathcal{S}$ un compact, puisque fermé et borné. La fonction f est continue sur ce domaine, donc bornée et atteint ses bornes, en particulier son maximum.

2 Le Lagrangien associé au problème est la fonction de 4 variables:

$$L(x,y,z,\lambda) = x + y + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

3 On cherche les points critiques du Lagrangien, ce qui donne: $\nabla f(x,y,z) - \lambda\nabla g(x,y,z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ 1 - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = z = \dfrac{1}{2\lambda} \\ 3\dfrac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{cases}$ Il s'ensuit que l'unique point critique est $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. C'est un maximum ou un minimum: ça ne peut être un minimum, puisqu'on a par exemple $f(1,0,0) = 1 < f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$, donc c'est le maximum.

Correction d'exercice supplémentaire 1

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^3$ par: $f(x,y,z) = x^5 + xyz + y^3 + 3xz^4 - 2$

1 Alors, la fonction f est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy + 12xz^3.$$

De plus, $f(1,-1,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1) = 11 \neq 0$. Alors, par le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage $\mathcal{V}(1,-1) \subseteq \mathbb{R}^2$ et une unique fonction $g : \mathcal{V}(1,-1) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathcal{V}(1,-1))$ telle que $g(1,-1) = 1$. et $f(x,y,g(x,y)) = 0$

2 L'équation du plan tangent à la surface $z = g(x,y)$ en $(1,-1)$. On a

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 5x^4 + yz + 3z^4, & xz + 3y^2, & xy + 12xz^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 7, & 4, & 11 \end{pmatrix}$$

Alors, l'équation est donnée par:

$$\langle \nabla f(1,-1,1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \Leftrightarrow 7x + 4y + 11z - 14 = 0.$$

Correction d'exercice supplémentaire 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$, avec la contrainte $g(x,y) = x^2 + y = 1$.

1 Le Lagrangien du problème s'écrit donc:

$$L(x,y,\lambda) = dfracx^29 + \frac{y^2}{4} - \lambda(x^2 + y - 1).$$

$$\nabla f(x,y) - \lambda\nabla g(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{9}x - 2\lambda x = 0 \\ \frac{1}{2}y - \lambda = 0 \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2\lambda \\ x(\frac{2}{9}x - y) = 0 \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2\lambda \\ x = 0 \vee y = \frac{2}{9} \\ x^2 + y = 1 \end{cases}$$

Donc, par substitution de $x = 0$ par dans la troisième équation, on obtient la première valeur critique $A(0,1)$. De même, en remplaçant $y = \frac{2}{9}$ dans la troisième équation, on obtient $x = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$, donc on trouve les deux autres valeurs critiques $B(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9})$ et $C(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9})$

2 On a $y = 1 - x^2$ donc $y \in] - \infty, 1]$. Par substitution dans f, on obtient la nouvelle fonction d'une seule variable

$$F(x) = f(x, y(x)) = \frac{x^2}{9} + \frac{(1-x^2)^2}{4} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{18}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \mp\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

D'où les trois points critiques du Lagrangien $A(0,1)$, $B(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9})$ et $C(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9})$.
Il est clair d'après l'étude de F que le minimum de cette fonction est atteint aux points $x = \mp\frac{\sqrt{7}}{3}$ et le maximum en $x = 0$. On voit facilement que A est un maximum local pour f, B et C étant des minimums globaux.

3 Alors,

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{7}{9}x + \frac{1}{4}.$$

4 Si f admet un maximum global, il est forcément atteint en son unique maximum local A, or on remarque que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x, 1-x^2) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

Donc f n'admet pas de maximum global sous la contrainte g.