Université de M'sila | Faculté de Maths-Info

Intégrales multiples

L2 Maths | Module: Analyse 4

Série d'exercices n°5 — Licence mathématiques-L2 2023

Remarque 1

l'exercice noté par ($\star$) ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de **TD**

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(1+x)(1+y)}, \quad D=[0,1]\times[0,1].$

2. $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy, \quad D=[0,1]\times[1,2].$

3. $\displaystyle\iint_D \frac{x\sin y}{1+x^2}dxdy, \quad D=[0,1]\times[0,\pi].$

4. $\displaystyle\iint_D xydxdy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>0,\ y>0 \text{ et } x^2+y^2<1\}.$

5. $\displaystyle\iint_D x\cos ydxdy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<1,\ x^2<y<x\}.$

6. $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>1,\ y>1, \text{et } x+y<4\}.$

Exercice 2

Calculer l'intégrale double $I=\displaystyle\iint_K xy^2dxdy$, sur K tel que

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y\geq 1,\ x^2+y^2\leq 1\}.$$

Exercice 3

Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes en changeant l'ordre d'intégration si nécessaire

1. $\displaystyle I_1=\int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1}(x^2+y)dxdy.$

2. $\displaystyle I_2=\int_{0}^{4}\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(xy+y^3)dxdy.$

3. $\displaystyle I_3=\int_{1}^{10}\int_{0}^{\frac{1}{y}} ye^{xy}dxdy.$

4. $\displaystyle I_4=\int_{0}^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}dxdy.$

Exercice 4

Calculer l'intégrale triple de la fonction

$$f(x, y, z) = xyz$$

dans le volume limité par les plans $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ et $x + y + z - 1 = 0$

Exercice 5

1 Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} dxdy$$

où le domaine d'intégration D est donner comme suit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\},$$

en utilisant le changement de variables suivantes: $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 6

En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, calculer les intégrales doubles suivantes

1. $I_1 = \iint_{D_1} \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2},\ \ D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$
2. $I_2 = \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy\ \ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$
3. $I_3 = \iint_{D_3} \frac{dxdy}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}$, où D_3 est la partie du plan comprise entre les courbes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \lambda = 0,\ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \mu = 0,\ \text{et } \lambda > \mu > 1.$$

Exercice 7

Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D \frac{\cos(x^2 + y^2)}{2 + \sin(x^2 + y^2)} dxdy$$

où le domaine d'intégration D est déterminer par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Exercice supplémentaire 1

Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes

1. $I_1 = \iint_{D_1} (x \sin y) dxdy,\ \ D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq x\}.$

2. $I_2 = \iint\limits_{D_2} 3y^3 e^{xy} dxdy, \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{x} \leq y \leq 1\}.$

3. $I_3 = \iint\limits_{D_3} \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy, \quad D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 4 - x^2\}.$

4. $I_4 = \iint\limits_{D_4} (x^2 + y^2) dxdy, \quad D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 2,\ y \geq 2,\ \text{et } x + y \leq 1\}.$

Exercice supplémentaire 2

Soit l'intégrale triple $I = \iiint\limits_{D} \frac{z^3 dxdydz}{(y+z)(x+y+z)}$, où D est le domaine définie par

$$D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ z \geq 0, \text{et } x + y + z \leq 1 \geq 0, \leq 4 - x^2\},$$

en utilisant le changement de variables $u = x + y + z,\ v = y + z$ et $w = z$.