

Remarque 1

l'exercice noté par (*) ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de TD

Correction d'exercice 1 ★

Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1 $\iint_D \frac{dx dy}{(1+x)(1+y)} = \left(\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \right) \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y} \right) = [\ln(1+x)]_0^1 [\ln(1+y)]_0^1 = \ln^2(2).$

2

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{2y}{x^2 + y^2} dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\ln(x^2 + 4) - \ln(x^2 + 1)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{3}{x^2 + 1} \right) dx. \end{aligned}$$

On calculons cette intégrale par partie, posons donc,

$$\begin{cases} u(x) = \ln \left(1 + \frac{3}{x^2 + 1} \right) \\ v'(x) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -\frac{6x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} \\ v(x) = x \end{cases}$$

Donc, on voit que

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy &= \frac{1}{2} \left[x \ln \left(1 + \frac{3}{x^2 + 1} \right) \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{6x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx + 4 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} + \left[-\arctan(x) + 2 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2} + 2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

3 $\iint_D \frac{x \sin y}{1 + x^2} dx dy = \left(\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2} dx \right) \left(\int_0^\pi \sin y dy \right) = [\ln(1 + x^2)]_0^1 [\cos y]_0^\pi = \ln 2.$

4

$$\begin{aligned}
\iint_D xy dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \left(\int_0^x \frac{2y}{1+y^2} dy \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \left[\arctan y \right]_0^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\
&= \left[\arctan^2 x \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.
\end{aligned}$$

5 En utilisant intégration par partie, on obtient donc,

$$\begin{aligned}
\iint_D x \cos y dx dy &= \int_0^1 x \int_{x^2}^x (\cos y dy) dx \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx + 4 \int_0^1 \frac{1}{x^2+4} dx \\
&= \int_0^1 x \left[\sin y dy \right]_{x^2}^x dx = \frac{1}{2} + \sin 1 - \frac{3}{2} \cos 1.
\end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^3} &= \int_0^3 \left[\int_1^{4-x} \frac{dy}{(x+y)^3} \right] dx = \int_1^3 \left[\frac{1}{(x+y)^2} \right]_1^{4-x} dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{16} x + \frac{1}{x+1} \right]_1^3 \\
&= \int_1^3 \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Correction d'exercice 2 ★

Au début on va donner la description hiérarchique du domaine K où

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Alors, on a $x + y \geq 1 \Rightarrow (x + y)^2 \geq 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 1$. Donc, on trouve, $2xy \geq 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow xy \geq 0$. Par suite $x \geq 0$ et $y \geq 0$ avec $y^2 \leq 1$. Par conséquent

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 1 - y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}.$$

$$\begin{aligned}
I = \iint_K xy^2 dx dy &= \int_0^1 \left[\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} x dx \right] y^2 dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} y^2 dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1-y^2}{2} - \frac{(1-y)^2}{2} \right] y^2 dy = \int_0^1 [y^3 - y^4] dy = \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

Correction d'exercice 3 ★

Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes en changeant l'ordre d'intégration si nécessaire

$$1 \quad I_1 = \int_{-1}^2 \int_{x^2-1}^{x+1} (x^2 + y) dx dy.$$

$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$. C'est à dire x est fixé. Donc,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^2 \int_{x^2-1}^{x+1} (x^2 + y) dx dy = \int_{-1}^2 \left[\int_{x^2-1}^{x+1} (x^2 + y) dy \right] dx = \int_{-1}^2 \left[yx^2 + \frac{1}{2}y^2 \right]_{x^2-1}^{x+1} dx \\ &= \int_{-1}^2 \left[(x+1)x^2 + \frac{1}{2}(x+1)^2 - (x^2-1)x^2 - \frac{1}{2}(x^2-1)^2 \right] dx \\ &= \left[-\frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^2 = \frac{117}{20}. \end{aligned}$$

$$2 \quad I_2 = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (xy + y^3) dx dy.$$

$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\}$. Dans ce cas y est fixé, et on a :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (xy + y^3) dx dy = \int_0^4 \left[\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (xy + y^3) dx \right] dy = \int_0^4 \left[\frac{yx^2}{2} + xy^3 \right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{y^2}{2} + y^{\frac{7}{2}} - \frac{y^3}{8} - \frac{y^4}{2} \right] dy \\ &= \left[\frac{y^3}{6} + \frac{2}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{y^4}{32} - \frac{y^5}{20} \right]_0^4 = -\frac{364}{15} + \frac{2}{9}\sqrt{262144}. \end{aligned}$$

3 On calcul $I_3 = \int_1^{10} \int_0^{\frac{1}{y}} ye^{xy} dx dy$. Donc, trouve

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^{10} \int_0^{\frac{1}{y}} ye^{xy} dx dy = \int_0^{\frac{1}{y}} \left[\int_1^{10} ye^{xy} dx \right] dy = \int_0^{\frac{1}{y}} \left[e^{xy} \right]_0^{\frac{1}{y}} dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{y}} (e - 1) dy = 9(e - 1). \end{aligned}$$

4 Pour, l'intégrale $I_4 = \int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} dx dy$. on a

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} dx dy = \int_0^{\sqrt{\ln 3}} \left[\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} \left[y \right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{\ln 3}} 2xe^{x^2} dx = \left[e^{x^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 3}} = 2. \end{aligned}$$

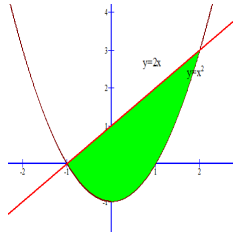


Figure 1: D_1 .

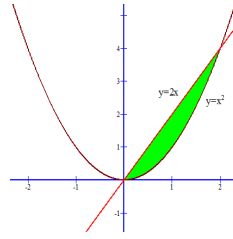


Figure 2: D_2 .

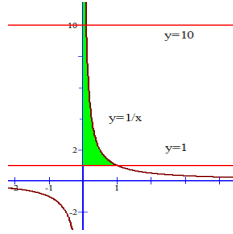


Figure 3: D_3 .

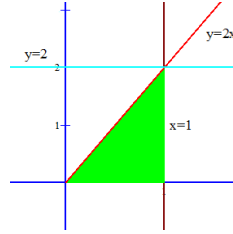


Figure 4: D_4 .

Correction d'exercice 4 ★

On Calcul l'intégrale de la fonction f définie par: $f(x, y, z) = xyz$ dans le volume V limité par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z - 1 = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \iiint_V xyz dx dy dz &= \int_0^1 x \left[\int_0^{1-x} y \left(\int_0^{1-x-y} z dz \right) dy \right] dx = \int_0^1 x \left[\int_0^{1-x} y \left(\frac{1}{2} z^2 \right)_0^{1-x-y} dy \right] dx \\ &= \int_0^1 x \left[\int_0^{1-x} \frac{1}{2} y (1-x-y)^2 dy \right] dx = \int_0^1 x \left[\frac{1}{4} y^2 (1-x)^2 + \frac{1}{8} y^4 - \frac{1}{8} y^4 (1-x) \right]_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x (1-x)^4 dx = \frac{1}{720} \end{aligned}$$

Correction d'exercice 5 ★

$I = \iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 1\}$. Au début, on

exprimer x et y en fonction de u et v . Donc, on a $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$ Comme,

$x \geq 0$ alors, on aura, $u+v \geq 0 \Rightarrow u \geq -v$.

et on aussi $y \geq 0 \Rightarrow u-v \geq 0 \Rightarrow v \leq u$. par conséquent on trouve $-u \leq v \leq u$.

Et on tenant compte $x+y \leq 1$ alors, on obtient $0 \leq u \leq 1$.

Cela donne le nouveau domaine d'intégration

$$Im(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1 \text{ et } -u \leq v \leq u\}.$$

On besoin aussi à le jacobien, donc,

$$\det(J(u, v)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

La nouvelle intégrale est exprimé par cette expression:

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} dx dy = \iint_D |\det(J(u,v))| f(u,v) du dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 \left[\int_{-u}^u e^{uv} dv \right] du = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 \left[\frac{e^{uv}}{2u} \right]_{-u}^u du \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 u (e^{u^2} - e^{-u^2}) du = \frac{1}{4} [e^{u^2} + e^{-u^2}]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} [e + e^{-1} - 2] = \frac{ch1 - 1}{2}.
 \end{aligned}$$

Correction d'exercice 6 ★

1 Posons, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, avec $0 \leq r \leq 1$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors, on voit que

$$I_1 = \iint_{D_1} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{1+r^2} = 2\pi \left[\frac{1}{2} \ln(1+r^2) \right]_0^1 = \pi \ln(2).$$

2 Posons, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, avec $0 \leq r \leq 1$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Alors, on trouve,

$$I_2 = \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = -\frac{\pi}{4} [e^{-r^2}]_0^1 = \frac{\pi(e-1)}{4e}$$

3 reste comme exercice.

Correction d'exercice 7 ★

Calculons l'intégrale double $I = \iint_D \frac{\cos(x^2+y^2)}{2+\sin(x^2+y^2)} dx dy$, où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

En faisant le changement, posons, donc, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, telles que $r \in [1, 2]$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. on voit donc,

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \frac{\cos(x^2+y^2)}{2+\sin(x^2+y^2)} dx dy = \int_1^2 \left[\int_0^{2\pi} \frac{r \cos r^2}{2+\sin r^2} d\theta \right] dr \\
 &= \pi \left[\ln(2+\sin r^2) \right]_1^2 = \pi \ln \left(\frac{\ln(2+\sin 4)}{\ln(2+\sin 1)} \right).
 \end{aligned}$$

Correction d'exercice supplémentaire 1 ★

Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales doubles suivantes

1 On calcule $I_1 = \iint_{D_1} (x \sin y) dx dy$, sur $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq x\}$. Alors,

on obtient

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iint_{D_1} (x \sin y) dx dy = \int_0^\pi \int_0^x x \sin y dx dy = \int_0^\pi \left[\int_0^x x \sin y dy \right] dx \\
 &= \int_0^\pi \left[-x \cos y \right]_0^x dx = \int_0^\pi [x - x \cos x] dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} - \cos x - x \sin x \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} + 2
 \end{aligned}$$

2 $I_2 = \iint_{D_2} 3y^3 e^{xy} dx dy$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$.

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \iint_{D_2} 3y^3 e^{xy} dx dy = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 x \sin y dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 3y^3 e^{xy} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx \right] dy \\
 &= \int_0^1 \left[3y^2 e^{xy} \right]_0^{y^2} dy = \left[e^{y^3} - y^3 \right]_0^1 = e - 2.
 \end{aligned}$$

3 Pour l'intégrale $I_3 = \iint_{D_3} \frac{x e^{2y}}{4-y} dx dy$, $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$. on a:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \iint_{D_3} \frac{x e^{2y}}{4-y} dx dy = \int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x e^{2y}}{4-y} dx \right] dy = \int_0^4 \left[\frac{x^2 e^{2y}}{2(4-y)} \right]_0^{\sqrt{4-y}} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2y} dy = \frac{1}{4} \left[e^{2y} \right]_0^4 = \frac{e^8 - 1}{4}.
 \end{aligned}$$

4 $I_4 = \iint_{D_4} (x^2 + y^2) dx dy$, $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2, y \geq 2, \text{ et } x + y \leq 1\}$.

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \iint_{D_4} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy \right] dx = \int_0^1 \left[(x^2 y + \frac{y^3}{3}) \right]_0^{1-x} dx \\
 &= \int_0^1 \left[(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3}) \right] dx = \int_0^1 \left[-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3} \right] dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x \right]_0^1 = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Correction d'exercice supplémentaire 2



On commence par écrire les expressions des variables x, y, z en fonction des nouvelles variables u, v et w . On a donc,

$$\begin{cases} u = x + y + z \\ v = y + z \\ w = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u - v \\ y = v - w \\ z = w \end{cases}$$

Alors, le jacobien du changement de variables est donner par

$$\det(J(u, v, w)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Sachant que $x + y + z \leq 1$ on trouve $0 \leq u \leq 1$, et comme $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, on aura $0 \leq w \leq v \leq u \leq 1$. Par conséquent, on exprimer l'intégrale I comme suit

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \frac{z^3 dx dy dz}{(y+z)(x+y+z)} = \int_0^1 \left[\int_0^u \left[\int_0^v \frac{w^3}{uv} dw \right] dv \right] du \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^u \frac{v^3}{4u} dv \right] du = \int_0^1 \frac{u^3}{16} du = \frac{1}{64}. \end{aligned}$$