Mila 17/02/2019

cours "1" Chapitre I : Hydraulique à surface libre

Introduction : ce chapitre présente de manière condensée les grands principe d'hydraulique à surface libre utiles pour la compréhension des cours d'eau.

I-1 Définition des différentes régimes d'écoulement

I-1-1 : Régime permanent :

En régime dit permanent, le chenal véhicule un débit Q constant dans le temps. Le tirant d'eau y en un point donné est donc aussi constant dans le temps.

Exemple : En pratique, on peut calculer en régime permanent des cannaux d'irrigation, des écoulement en rivière à l'étiage ou en régime moyen. Mais le calcul d'un écoulement en crue rapide ne peut pas être abordé par le régime permanent.

I-1-1.1 Regime permanent uniforme

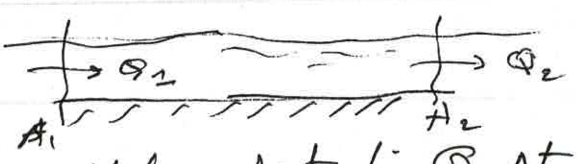
Ecoulement permanent / stationnaire : en un point de l'écoulement les caractéristiques ne dépendent pas du temps, soit $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$

Ecoulement uniforme : la profondeur y, la pente I, la vitesse V, la section A restent constant le long d'un longueur x donnée de canal, soit $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ....

Un écoulement réellement uniforme se rencontre rarement dans les rivières, mais plutot dans les canaux de grande longueur, à section et pente constante

(a) les caractéristique de ce régime :

(a)-1 l'équation de la continuité :



le volume entrant $Q_1 . \Delta t$ et egal au volume sortant $Q_2 \, \Delta t$

* En écoulement permanent (uniforme ou non), le débit se propage en restant constant (dans l'espace)

* En écoulement permanent uniforme, la section mouillée et la vitesse moyenne sont constantes le long du chenal.

(a)-2 L'équation du régime uniforme :

la charge moyenne en une section :

$$H = y + z + \beta \frac{V^2}{2g}$$

z : cote du fond du canal

y : la profondeur d'eau

β : coef de Coriolis ($\beta \simeq 1 \to 1{,}2$) $\beta = 1$: la répartition uniforme de la vitesse.

Le théorème de Bernoulli exprime que dans un écoulement permanent d'un fluide parfait ($\nu = 0$), la charge H est constante le long de courant.

Mais nous nous intéressons à des liquides réels et donc visqueuse.

Pour un fluide réel incompressible, le théorème de Bernoulli généralisé exprime simplement que la variation de la charge ΔH est égale à la perte de charge $J \cdot \Delta x$.

Donc le gradient de perte de charge J est identique à la pente de la ligne de charge : $J = -\frac{dH}{dx}$

D'où : $J = -\frac{d}{dx}\left(y + z_f + \frac{V^2}{2g}\right) = -\frac{dz_f}{dx}$

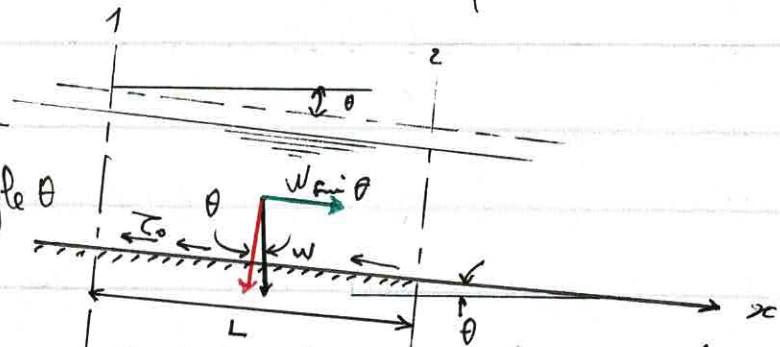
car y comme V sont des constantes. Il est résulte $I = J \Rightarrow$ un écoulement uniforme n'existe que si la pente est positive.

Dans un écoulement uniforme, la ligne de la charge, la surface libre et le fond sont parallèles.

(a)-3 Formule Chézy et formule de Manning-Strickler :

Dans un écoulement uniforme les forces appliquées à la masse fluide en mouvement comprise entre deux sections espacées d'une distance L sont en équilibre :

si on fait le bilan dans la Direction x, incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale :



Force sur la surface A_{11} − force sur la surface A_{22} + $W\sin\theta$ − force visqueuse = 0

$$\gamma A_1 \cdot \bar{h}_1 - \gamma A_2 \bar{h}_2 + \gamma A L \sin\theta - \tau_0 L P = 0$$

$A_1 = A_2 = A$ section de la tranche d'eau considérée

P : périmètre mouillé de la section mouillée.

$\bar{h}$: centre de gravité de la surface mouillé. Par suite :

$$\gamma A L \sin\theta = \tau_0 L P \Rightarrow \boxed{\tau_0 = \frac{\gamma A \sin\theta}{P} = \gamma R_h \cdot I} \quad (1)$$

Dans les problèmes courants de rivières ou de canaux, la pente est faible ou très faible de l'ordre 0,2 ‰ à 5%.

τ_0 : est la force de frottement par unité de surface ou contrainte tangentielle à la paroi. Par ailleurs on définit pour un écoulement en conduite le coefficient de frottement f par le biais de :

$\tau_0 = \frac{f}{8} \rho V^2$, il vient que $\boxed{V = \sqrt{(8g/f) R_h I} = C \sqrt{R_h \cdot I}}$ (2)

ou C : coefficient de Chézy : exprime la résistance à l'écoulement dépend de la nature des parois et du rayon hydraulique par la formule de Manning-Strickler $C = \frac{1}{n} R_h^{1/6}$

ou bien $K = \frac{1}{n}$ avec n : coef de Manning
K : " de Strickler } coefs du rugosités

En partant de la formule de Chézy et de la formulation du cofts données ci-dessus, nous obtenons la très classique formule de Manning-Strickler : $\boxed{V = K R^{2/3} \cdot I^{1/2}}$ (3)

avec $Q = V.A$ et en tenant compte de la relation (3), il devient :

$$\boxed{Q = K A . R_R^{2/3} I^{1/2}}$$ avec :

- V : vitesse moyenne
- K : coef de rugosité (ou de Strickler) du lit.
- A : section mouillée.
- R_h : rayon hydraulique $R_h = (A/P)$ avec P : périmètre mouillé
- I : pente (constante par hypothèse) du tronçon de cours d'eau (pente du fond), aussi égale à la pente de la ligne d'eau et à la perte de charge par unité de longueur.

Remarque : Tableau I.1 : Ordres de grandeur du Coeft de Strikler de canaux ou rivières

Nature des Parois	Valeur de K $m^{1/3} s^{-1}$
Béton lisse	75 - 90
Canal en terre, non enherbé	60
canal en terre enherbé	50
Rivière de plaine, sans végétation	35 - 40
Rivière de plaine large végétation peu dense	30
Rivière à berges étroites très végétalisées	10 - 15
Lit majeur en prairie	20 - 30

Dans le cas d'une rivière à lit gravier et à berges non végétalisées

la loi de Strickler $K = 21 / d_{50}^{1/6}$; la granulométrie est étroite

" " de Meyer et Müller : $K = 26 / d_{90}^{1/6}$: la granulométrie est étalée

" " " Raudkivi $K = 24 / d_{65}^{1/6}$

d_n : désigne le diamètre (en mètre) des grains du lit tel que n% en poids aient un diamètre inférieur.

Remarque : ① Il ne faut pas employer ces formules pour des sables.

② Pour le cas des rivières à graviers, elles ne donnent le Coef de Strickler global du lit mineur ^{du lit mineur} que ^{rque} pour des tronçons réguliers.

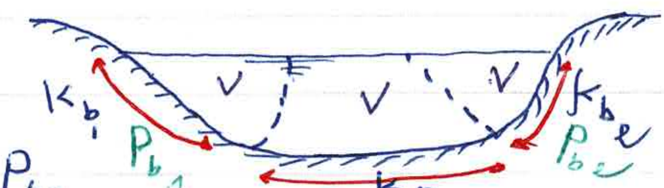
Attention : Le coef de rugosité d'une rivière réelle varie en fonction de y c-à-d en fonction de débit Q en raisons :

1. La rugosité du fond et celle des berges ne sont généralement pas identiques
2. En cas de débordement, le lit majeur a une rugosité différente à celle du lit mineur.
3. La rugosité du fond varie selon qu'il est plat ou bien formé de dunes.

a-3-1 La rugosité composée : (Hypothèse : Vitesse égale dans chaque s-section)

Selon Einstein (1934)

La rugosité équivalente K_{eq}



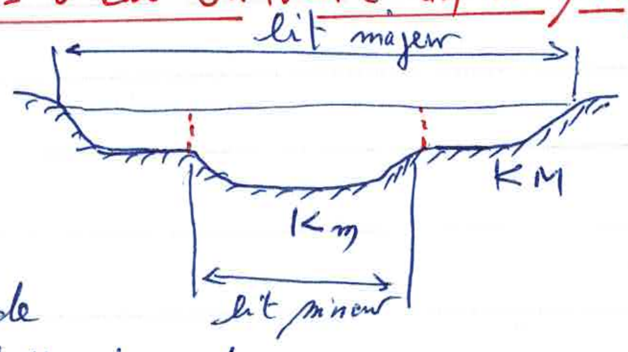
$$\frac{P_t}{K_{eq}} = \frac{P_f}{K_f^{3/2}} + \frac{P_{b_1}}{K_{b_1}^{3/2}} + \frac{P_{b_2}}{K_{b_2}^{3/2}}$$

« lit mineur »

Exemple d'application : Pour une hauteur de berges de 2 m, une largeur du fond de 30 m, un coef de rugosité du fond $K_f = 35\ m^{1/3} s^{-1}$ et des berges $K_b = 20\ m^{1/3}.s^{-1}$, on obtient : $\frac{34}{K_{eq}^{3/2}} = \frac{30}{35^{3/2}} + 2 \cdot \frac{2}{20^{3/2}}$

$K_{eq} = 32\ m^{1/3} s^{-1}$

a-3-2 Rugosité globale d'un cours d'eau contient un lit majeur



(Ramette, Nicollet, 1981)

$$K = 0{,}9\ K_m^{5/6}\ K_M^{1/6}$$

K_m : représente le coef de rugosité de lit mineur au moment de débordement

K_M : le coef de lit majeur.

a-4 : Coefficient de Chezy donné par : Bazin et Kutter

Ces relations ne sont valables qu'en régime turbulent rugueux.

Bazin : $C = \frac{87\sqrt{R_h}}{k_B + \sqrt{R_h}}$, Kutter : $C = \frac{100\sqrt{R_h}}{K_k + \sqrt{R_h}}$ $[k_B, K_k] = m^{1/2}$

b) Régime permanent graduellement varié :

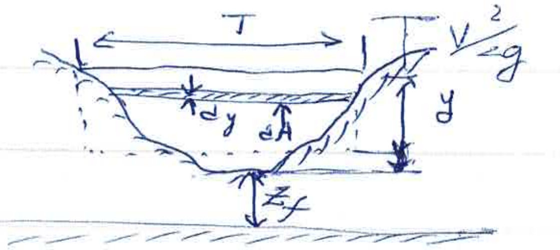
Un écoulement graduellement varié est obtenu lorsque :

(1) les dimensions, les formes, la rugosité, la pente du chenal varient graduellement et faiblement sans brusquerie.

(2) Le tirant d'eau varie faiblement.

b.1 Equation de la ligne d'eau : "tirant d'eau normal"

La charge hydraulique



$$H = y + z_f + \frac{V^2}{2g} = y + z_f + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

y = tirant d'eau, z_f = cote du fond, A = la section mouillée la section transversale et V = vitesse moyenne dans la section A

y, z_f, V ces trois valeurs étant des fonctions de x

Intéressons-nous à la perte de charge qui est : $J = -\frac{dH}{dx}$ ....(1)

le signe (−) signifie la perte

$(1) \Leftrightarrow J = -\frac{dH}{dx} = -\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} + \frac{Q^2}{gA^3} \cdot \frac{dA}{dx}$ ...(2) (Q constant, Ecoulement permanent)

$A = A(x, y) \Rightarrow dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = dy \cdot T$

T : Largeur au miroir

(2) $J = -\frac{dH}{dx} = -\frac{dy}{dx} + I + \frac{Q^2 T}{gA^3} \frac{dy}{dx}$ (3) alors :

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{Q^2}{gA^3}T - 1\right) = J - I$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I - J}{1 - \frac{Q^2}{gA^3} T} \quad \text{.....(4)}$$

Une équation différentielle de la ligne d'eau. cette équation est de 1er ordre, le problème est complètement résolu avec une seule condition en limite.

Lorsque $I = J$ on trouve $\frac{dy}{dx} = 0$ (y = constante) c-à-d le régime est uniforme.

Pour Q et I sont des constantes connues et T et A sont des fonctions connues de y. On considère que $J = \dfrac{Q^2}{K^2 A^2 R_h^{4/3}}$

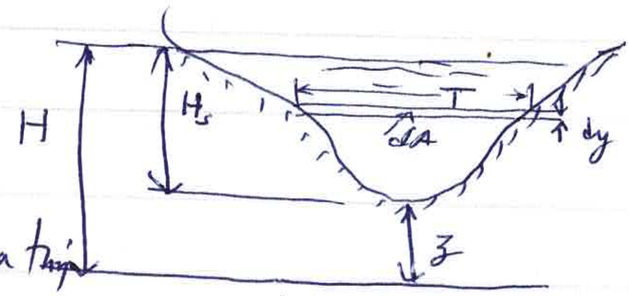
- Pour l'équation (4) nous n'avons pas le droit d'écrire celle-ci lorsque $\dfrac{Q^2 T}{g A^3} = 1$

b Par définition, le tirant d'eau normal y_n est la solution de l'équation différentielle (3) pour un régime uniforme donc

(3) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{dH_s}{dx} = 0$

H_s : est la charge spécifique

$H_s = H - z \Rightarrow \dfrac{dH_s}{dx} = I - J$



y_n est donc la solution de l'équation en y : $Q = K A . R_h^{2/3} I^{\frac{1}{2}}$. ($I$ pente positive).

b-2 : le tirant d'eau Critique :

Le tirant ou la profondeur d'écoulement critique est correspond au minimum de l'énergie spécifique $H_s = y + \dfrac{Q^2}{2gA^2}$ lorsque le tirant d'eau varie c-à-d $\dfrac{dH_s}{dy} = 0$

$$\frac{dH_s}{dy} = \frac{d}{dy}\left(y + \frac{Q^2}{2gA^2}\right) = \frac{dy}{dy} + \left(-\frac{2Q^2 A}{2g A^4}\frac{dA}{dy}\right)$$

$$= 1 - \frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dy} = 1 - \frac{Q^2 T}{gA^3}$$

L'énergie spécifique est minimale lorsque le tirant d'eau vérifie : $\boxed{\left(\dfrac{Q^2 T}{gA^3}\right)_c = 1}$ ---- (5)

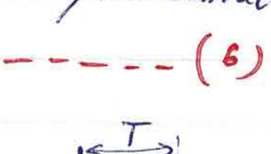
L'équation (5) est la condition de l'écoulement critique : Alors l'énergie spécifique minimale est

$H_{sc} = y_c + (A_c/2T)$ ----- (6)

Exemple :

① Canal rectangulaire : $A_c = b y_c$

$T = b$



La condition d'écoulement critique (7) $\dfrac{Q^2 b}{g b^3 y_c^3} = 1 \Leftrightarrow y_c = \sqrt[3]{\dfrac{Q^2}{g b^2}}$