المحور الثالث: نظرية التقدير

تمهيد:

يتكون المجتمع الاحصائي من مجموعة من المفردات التي تكون محل اهتمام الباحث، ويتم دراسة المجتمع من خلال معالمه أو خصائصه، على غرار متوسط المجتمع μ والانحراف المعياري σ، ونسبة صفة معينة في المجتمع P. وبدلا من دراسة جميع مفردات المجتمع فإنه يتم اختيار عينة تمثله (عينة ممثلة *échantillon représentatif*) عادة ما تكون عينة عشوائية، ثم يتم دراسة مفردات هذه العينة وحساب معالمها (متوسط العينة $\bar{X}$، الانحراف المعياري للعينة S، ونسبة صفة معينة في العينة $\hat{P}$)، ويتم استخدام هذه المعالم في عملية الاستدلال الاحصائي لمعالم المجتمع التي عادة ما تكون المجهولة.

نهدف من خلال هذا المحور الى التعرف على:

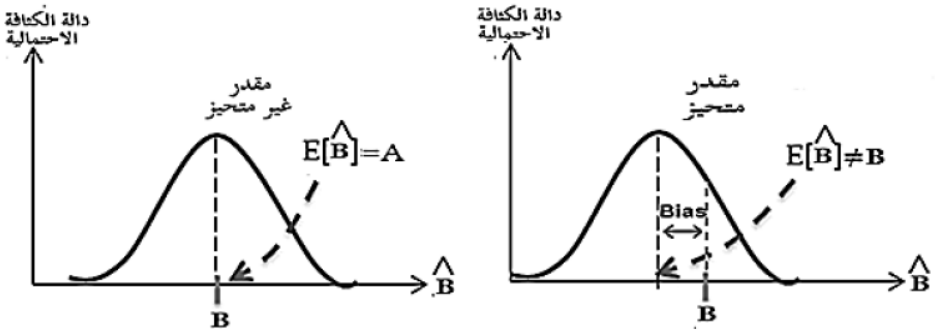
- كيفية استخدام بيانات العينة لتقدير معالم المجتمع المجهولة؛
- التعرف على أنواع التقدير.

خصائص المقدر

لتقدير معلمة من معالم مجتمع محل دراسة، نحتاج إلى اختيار الإحصائية المناسبة في العينة لتقدير هذه المعلمة، غالبا ما تكون المعلمة المناظرة في العينة هي أحسن مقدر، كأن نقدر متوسط المجتمع μ من خلال متوسط العينة μ_m تسمى الإحصائية المستخدمة في التقدير المقدر.

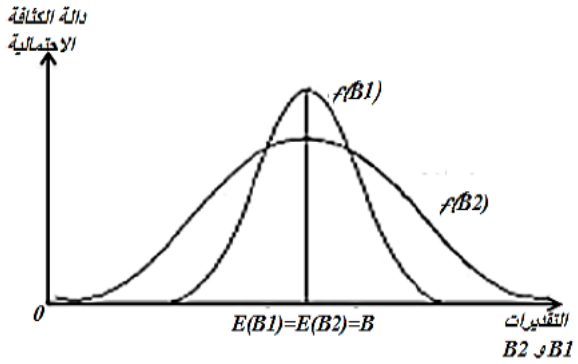
- **المقدر غير المتحيز :** نقول عن إحصائية ما بأنها مقدر غير متحيز sans biais لمعلمة المجتمع إذا كان متوسطها أو توقعها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع.

التمثيل البياني لصفة عدم التحيز



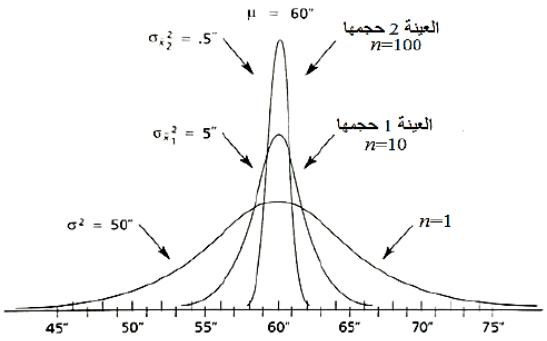
- **الكفاءة.** تتعلق كفاءة (efficacité) مقدر ما بمقدار التباين لتوزيع المعاينة للإحصائية، فإذا كان لمقدرين (إحصائيتين) نفس المتوسط نقول عن المقدر ذو توزيع المعاينة الأقل تباينا أنه الأكثر كفاءة.

التمثيل البياني لصفة الكفاءة



- **التقارب convergeance :** نقول عن مقدر أنه متقارب إذا كان يؤول إلى قيمة المعلمة المقدرة عندما يؤول حجم العينة إلى ما لا نهاية.

التمثيل البياني لخاصية التقارب

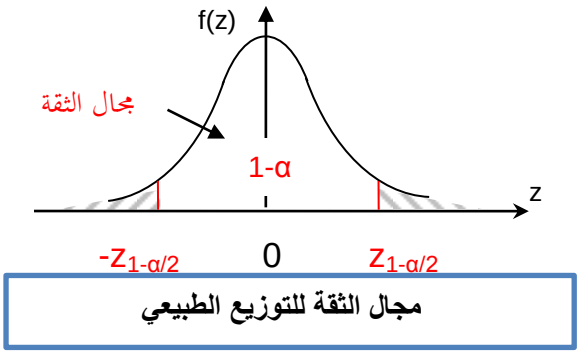


التقدير النقطي والتقدير بمجال:

قد نحتاج إلى تقدير لمعلمة مجتمع بقيمة واحدة ونقول عن هذا التقدير أنه **تقدير نقطي**، و أحيانا أخرى نحتاج إلى تقدير معلمة المجتمع بنقطتين يحددان مجال لقيمة المعلمة ونقول عن هذا النوع من التقدير أنه **تقدير بمجال**.

درجة التأكد: لكي يكون التقدير علميا ينبغي تقييم احتمال أن تكون المعلمة تنتمي فعلا إلى المجال المحدد، لذلك نلحق بالمجال ما يسمى بدرجة أو مستوى الثقة، ويرمز له ب p. الاحتمال المعاكس يسمى احتمال الخطأ ويرمز له ب α ، ويسمى أيضا ""مستوى المعنوية".

تعيين حدود مجال الثقة: تحدد حدود الثقة من خلال معاملات الثقة التي بدورها تحدد من خلال مستوى المعنوية (مستوى الثقة). ففي حالة استخدام التوزيع الطبيعي للتقدير تكون القيمتين ± 1.96 معاملات الثقة من أجل مستوى ثقة 95% بينما القيمتين ±2.58 تمثلان معاملات الثقة من أجل مستوى ثقة 99 % .



مجال الثقة للتوزيع الطبيعي

مجال الثقة للمتوسط

يقدر متوسط المجتمع μ من خلال الإحصائية m.

تقدير μ باستخدام التوزيع الطبيعي

نستخدم التوزيع الطبيعي لتحديد مجال الثقة إذا علمنا أن المجتمع الذي سحبت منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي.

وفي حالة العينة الممتدة ($n \geq 30$) يمكن كذلك الاستفادة من نظرية النهاية المركزية أن m تتبع التوزيع الطبيعي.

تكتب حدود مجال الثقة كما يلي:

$$m \pm z_c \frac{S'}{\sqrt{n}} \quad \text{أو} \quad m \pm z_c \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

وفي حالة σ مجهول: $m \pm z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

نستخدم هذه الصيغة إلا إذا كان المجتمع محدود (ذا حجم N) والمعاينة نفادية حيث تصبح الصيغة كالآتي:

$$m \pm z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

إلا أنه غالبا ما يكون الانحراف المعياري للمجتمع σ مجهولا، ولذلك نعوض σ في الصيغ السابقة بالمقدر S' أو S.

الجدول الآتي يبين قيم z_c التي تمثل حدود مجال الثقة بحسب مستوى الثقة :

مستوى الثقة 1-α	0.99	0.98	0.95	0.90	0.8	0.5
مستوى α المعنوية	0.01	0.02	0.05	0.10	0.2	0.5
1- α/2	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75
$Z_{1-\alpha/2}$	82.5	2.326	1.96	1.645	1.282	0.674

تقدير μ باستخدام التوزيع t :

في حالة العينة الصغيرة (n < 30) وσ مجهول نستخدم توزيع ستيودنت لتحديد مجالات الثقة ل μ، مثلا القيم $-t_{0.975}$ ؛ $t_{0.975}$ تحد 95 % من المساحة تحت المنحنى ونقول أن $t_{0.975}$; $-t_{0.975}$ تمثل القيم الحرجة أو معاملات الثقة عند مستوى ثقة 95 % ونكتب:

$$-t_{0.975} < \frac{m-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} < t_{0.975}$$

ومنه نستخلص مجال الثقة ل μ كما يلي:

$$m - t_{0.975} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} < \mu < m + t_{0.975} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

مجال الثقة للنسبة

حالة المجتمع غير محدود أو المعاينة غير نفادية و العينة الممتدة ($n \geq 30$) :

لتكن s إحصائية تمثل نسبة "نجاحات" في عينة ذات حجم $n \geq 30$ مستخرجة من مجتمع ثنائي حيث p هي نسبة النجاحات. تستعمل التوزيع الطبيعي لتقدير p فنعين حدود الثقة ل p كما يلي: $p' \pm z_c\sigma_p$ أين p' نسبة النجاحات في العينة،

نعلم من الفصل السابق أن $\sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ ومنه يحدد مجال الثقة ل p كما يلي:

$$p' \pm z_c \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

في حالة كون المجتمع محدود ذا حجم N والمعاينة نفادية:

$$p' \pm z_c \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

مجال الثقة للتباين

لتقدير التباين والانحراف المعياري لمجتمع بمجال ثقة نستعمل الخاصية :

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

مجالات الثقة لنسبة تباينين

رأينا سابقا (نظرية 11 من الفصل 5) أنه إذا كان لدينا مجتمعان طبيعيان تبايناهما σ^2_1 , σ^2_2 وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي n_1 , n_2 فإن :

$$F = \frac{\left[\frac{S_1^2 n_1}{n_1 - 1}\right]\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left[\frac{S_2^2 n_2}{n_2 - 1}\right]\frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2} \rightarrow F_{n_1-1;\, n_2-1}$$

إذا يمكن تكوين تقدير بمجال ل F عند مستوى ثقة 0.98 كما يلي:

$$F_{0.01} \leq \frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2} \leq F_{0.99}$$

و من ثم يمكن تقدير النسبة بين تبايني المجتمعين كما يلي:

$$\frac{1}{F_{0.99}}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{1}{F_{0.01}}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}$$

مجالات الثقة للفروق والمجاميع

إذا كانت S_1 وS_2 إحصائيتا معاينة لها توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي، والعينتان مستقلتان، تكتب حدود الثقة للفروق بين المعالم التي تمثلها الإحصائيتين كما يلي:

$$S_1 - S_2 \pm z_c \cdot \sigma_{S_1-S_2} = S_1 - S_2 \pm z_c \cdot \sqrt{\sigma^2{}_{S_1} + \sigma^2{}_{S_2}}$$

في حالة المجموع :

$$S_1 + S_2 \pm z_c \cdot \sigma_{S_1-S_2} = S_1 + S_2 \pm z_c \cdot \sqrt{\sigma^2{}_{S_1} + \sigma^2{}_{S_2}}$$