Université de Mohammed Boudiaf, M'sila — Faculté des mathématiques
Licence mathématique (S2) : 2022/2023 — B. Bougherara, M. Benmeddour

Module : Analyse 02

Série 05 (Développement limitée)

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = 1 + x + x^3 \sin\frac{1}{x}$$

1. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.
2. Est ce que f admet un développement limité d'ordre supérieur à 2 au voisinage de 0 ?

Exercice 2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On définit pour h assez petit

$$g(h) = \frac{1}{h^2}\left(f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)\right).$$

En utilisant la formule de Taylor-Young, calculer $\lim_{h\to 0} g(h)$.

Exercice 3. En déterminant un équivalent simple, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \arcsin x}{\sin^3 x},\quad \lim_{x\to 0} = \frac{5^x - 3^x}{4^x - 2^x},\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sh}x}{\sin x}\right)^{1/x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right),\quad \lim_{x\to +\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2},$$

Exercice 4. Calculer les développements limitées d'ordre n au voisinage de x_0 de la fonction f dans les cas suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2},\quad \mathbf{x_0 = 0},\ \mathbf{n = 3},\quad f(x) = e^{x^2-1},\quad \mathbf{x_0 = 1},\ \mathbf{n = 3}$$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1},\quad \mathbf{x_0 = 0},\ \mathbf{n = 2},\quad f(x) = e^{\cos x - 1},\quad \mathbf{x_0 = 1},\ \mathbf{n = 4}$$

$$f(x) = \sqrt{\cos x},\quad \mathbf{x_0 = 0},\ \mathbf{n = 5},\quad f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{2022}\frac{x^k}{k!}\right),\quad \mathbf{x_0 = 0},\ \mathbf{n = 2023}.$$

Exercice 5. A l'aide de développement limité d'une dérivée, calculer le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 des fonctions suivantes

$$f(x) = \arctan x,\quad g(x) = \text{argsh}x.$$

Exercice 6. En utilisant la division euclidienne, calculer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{x+x^2}{\sin x}$.

Exercice 7. Déterminer l'équation de la tangente en $x_0 = 1$ de la courbe donnée par l'équation

$$f(x) = x + 2\sqrt{x}.$$

ainsi sa position au voisinage de 1.

Exercice 8. Étudier les branches infinies de la courbe d'équation

$$f(x) = (x^3 + x + 1)^{1/3} - (x^2 - x - 1)^{1/2}$$

et étudier sa position par rapport à l'asymptote dans chaque cas.