Université de Mohammed Boudiaf, M'sila — Faculté des mathématiques
Licence mathématique (S2) : 2022/2023 — B. Bougherara, M. Benmeddour

Module : Analyse 02

Série 06 (Intégrales et calculs de primitives)

Exercice 1. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 x^2\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 e^x\mathrm{d}x$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\frac{k\pi}{n}$$

Exercice 3. A l'aide d'intégration par parties, calculer les primitives suivantes :

$$I_1=\int x\ln x\mathrm{d}x, \quad I_2=\int \sin^2 x\mathrm{d}x, \quad I_3=\int e^{-2x}\cos x\mathrm{d}x$$

Exercice 4. Calculer en deux manières différentes une primitive F de la fonction f définie par

$$f(x)=x^2e^{\frac{x}{3}}$$

Exercice 5. Soient

$$F(x)=\int_1^x\cos(\ln t)\mathrm{d}t, \quad G(x)=\int_1^x\sin(\ln t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $F(x)=x\cos(\ln x)-1+G(x), \quad G(x)=x\sin(\ln x)-F(x)$.
2. Déduire $F(x)$ et $G(x)$.

Exercice 6. Calculer les primitives suivantes

$$\int x(2x^2+1)^n\mathrm{d}x, \quad \int\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x, \quad \int\sin x\cos^2 x\mathrm{d}x, \quad \int x(x^2+1)^{2022}\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

Exercice 7.

1. Écrire x^2+2x+3 sous forme canonique et puis calculer les intégrales suivantes

$$\int\frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x, \quad \int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\mathrm{d}x, \quad \int\sqrt{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$$

2. * Même question pour $-x^2+x+1$

Exercice 8. Calculer les primitives suivantes en indiquant l'ensemble de validité

$$\int\frac{1}{x(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x, \quad \int\frac{1}{x(x+1)^3}\mathrm{d}x, \quad \int\frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x, \int x\arctan x\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x, \quad \int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\mathrm{d}x, \quad \int\frac{3+\ln x}{(4+\ln x)^2}\mathrm{d}x$$

Exercice 9. Posons $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x, \quad J=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$. En calculons $I+J$ et $I-J$ déduire les valeurs de I et J.

Exercice 10. Soit $f:[-a,a]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction paire (resp. impaire). Montrer que

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \ (\textbf{resp. } =0)$$