Université de Mohammed Boudiaf, M'sila — Faculté des mathématiques
Licence mathématique (S2) : 2022/2023 — B. Bougherara, M. Benmeddour

Module : Analyse 02

Série 07 (Équations différentielles)

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles (ED) suivantes d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ supposée dérivable

1. $y' = y + 1, \qquad I = \mathbb{R}$
2. $-2\sqrt{x}y' - 1 - y = 0, \qquad I = \mathbb{R}_+^*$
3. $x^2y' + y = 0, \qquad I = \mathbb{R}^*$
4. $x^2y' + y = 0, \qquad I = \mathbb{R}$
5. $xy' = x + y, \qquad I = \mathbb{R}^*.$

Exercice 2. Considérons l'équation différentielle linéaire suivantes

$$(\mathrm{E}) \qquad xy' + 5y = (2x+5)e^{2x}$$

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est une solution de (E) .
2. Donner alors la solution générale de l'équation (E).
3. Trouver la solution qui satisfait $y(1) = 0$.

Exercice 3. Résoudre les EDL suivantes :

1. $(\sin x)y' - (\cos x)y + 1 = 0$
2. $xy' + 5y = (2x+5)e^{2x}$
3. $y' - \frac{y}{x-1} = 2x^2 - x - 1.$

Exercice 4 (Équations de Bernoulli et Riccati)**.** Résoudre les ED suivantes

$$y' + y - x^2y^2 = 0, \quad 3xy^2y' - 2y^3 = x^3, \quad y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1.$$

Exercice 5. Résoudre les ED suivantes d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable :

1. $y'' + y = xe^x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$
2. $y'' + y' - 2y = (x+3)e^x$
3. $y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x$
4. $y'' - 3y' + 2y = x(e^x + e^{-2x})$

Résumé sur les équations différentielles linéaires (EDL)

1. **EDL homogène du premier ordre**

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \text{ ....(H)}$$

La solution générale est donnée par

$$\boxed{y_h(x) = k \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x\right)}$$

2. **EDL non homogène du premier ordre**

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0 \text{ ....(E)}$$

La solution générale de (E) est la solution de (H) + une solution Particulière

$$\boxed{y_g(x) = y_h + y_p}$$

La solution particulière est de la forme : $y_h(x) = k(x)\exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x\right)$

3. **EDL homogène du second ordre à coefficients constantes**

$$ay'' + by' + cy = 0 \text{ ....(H)}$$

L'équation caractéristique associée $ar^2 + br + c = 0$ ....(I)

- Si $\Delta > 0$ alors il existe deux racines réels r_1 et r_2 et la solution est donné par

$$\boxed{y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}}$$

- Si $\Delta = 0$ alors il existe une racine double $r_0 = -b/2a$ et la solution est donné par

$$\boxed{y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{r_0 x}}$$

- Si $\Delta < 0$ alors il existe deux racines complexes $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ et la solution est donné par

$$\boxed{y_h(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right)}$$

4. **EDL non homogène du second ordre à coefficients constantes**

$$ay'' + by' + cy = f(x) \text{ ....(E)}$$

La solution générale est $y_g(x) = y_h + y_p$.

- Si $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ alors $\begin{cases} y_p(x) = e^{\alpha x}Q_n(x) & \text{si} \quad \alpha \text{ n'est pas racine de (I)} \\ y_p(x) = x^k e^{\alpha x}Q_n(x) & \text{si} \quad \alpha \text{ racine de multiplicité k} \end{cases}$

- Si $f(x) = P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)$ alors

$$\begin{cases} y_p(x) = \tilde{P}_n(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_m(x)\sin(\beta x) & \text{si} \quad i\beta \text{ n'est pas racine de (I)} \\ y_p(x) = x^k\left(\tilde{P}_n(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_m(x)\sin(\beta x)\right) & \text{si} \quad i\beta \text{ est racine de multiplicité k} \end{cases}$$